

**В. В. БЕЛЕЦКИЙ**

# **ОЧЕРКИ О ДВИЖЕНИИ КОСМИЧЕСКИХ ТЕЛ**



**Издательство «Наука»  
Главная редакция  
физико-математической литературы  
Москва 1972**

**Очерки о движении космических тел,**  
В. В. Б е л е ц к и й, Главная редакция физико-  
математической литературы изд-ва «Наука»,  
М., 1972, 360 стр.

Книга содержит серию очерков об интересных задачах механики космического полета и небесной механики. В них рассматриваются различные траекторные задачи механики космического полета, эволюция орбит искусственных и естественных небесных тел, встречающиеся резонансные явления, описаны оригинальные задачи динамики относительного движения на орбите и многие другие проблемы. Дается параллельное изложение необходимого математического аппарата, однако упор делается на выявление механической сути задач.

Книга предназначена всем, кто интересуется или занимается механикой космического полета, особенно молодым специалистам в этой области и студентам соответствующих специальностей.

Табл. 23. Илл. 154. Библ. 136 назв.

**Р И С У Н К И**

**доктора физико-математических наук**

**И. В. НОВОЖИЛОВА**

# СОДЕРЖАНИЕ

Посвящение . . . . .	6
От автора . . . . .	7

## Очерк первый

### О невозмущенном и возмущенном движении спутника с отступлением об асимптотических методах нелинейной механики (11)

1. Нам повезло . . . . .	11
2. Кеплеровское движение . . . . .	15
3. Возмущенное движение. Оскулирующие элементы . . . . .	20
4. Оскулирующая орбита экваториального спутника . . . . .	22
5. Уравнения в оскулирующих элементах. Элементы Делоне . . . . .	28
6. Отступление об асимптотических методах нелинейной механики. Колебания спутника около центра масс. Осреднение канонических уравнений . . . . .	33
7. Спутник в поле тяготения Земли . . . . .	51

## Очерк второй

### О втором рождении старой задачи, или что получится, если две массы поместить на чисто мнимое расстояние друг от друга (57)

1. От Эйлера до наших дней . . . . .	57
2. Связь двух задач . . . . .	60
3. Интегрирование. Система координат . . . . .	65
4. Метод Гамильтона — Якоби . . . . .	66
5. Интегрирование . . . . .	68
6. Область движения спутника . . . . .	70
7. Эллиптические функции Якоби . . . . .	74
8. Движение полярного спутника Земли . . . . .	77

## Очерк третий

### Еще одна старая задача, возвращенная к новой жизни (80)

1. Что за задача? . . . . .	80
2. Коротко об уравнениях движения и их интегрировании . . . . .	82
3. Плоское движение . . . . .	86
4. Описание траекторий плоского движения . . . . .	88
5. Немного о влиянии светового давления на движение спутников Земли . . . . .	98

О черк четвертый

Движение миров (104)

1. Еще раз о «Теореме Лапласа» и других Серьезных Вещах	104
2. Не хотите ли Луну уронить на Землю? . . . . .	113
3. Область маловозмущенного движения . . . . .	119
4. Устойчивость Солнечной системы . . . . .	124
5. Не резонансна ли Солнечная система? . . . . .	130
6. Сведения из теории устойчивости. Квантованность устойчивых движений . . . . .	139

О черк пятый

Ограниченная задача трех тел и полет к Луне (147)

1. Поверхности Хилла . . . . .	147
2. Отступление о точках либрации . . . . .	153
3. Траектории сближения и метод их исследования . . . . .	155

О черк шестой

Они вальсируют на орбитах (160)

1. Гравитационный потенциал . . . . .	160
2. О вращении Луны . . . . .	163
3. Устойчивость относительного равновесия в гравитационном поле . . . . .	165
4. Риноградения на орбите . . . . .	169
5. О пассивной стабилизации искусственных спутников	171
6. Нелинейные колебания . . . . .	172
7. Быстрые вращения . . . . .	179
8. Автор слегка припугнет читателя . . . . .	185
9. Возмущенное движение в явном виде . . . . .	187
10. «Пегас» . . . . .	188
11. Луна, Меркурий, резонансы . . . . .	194
12. Скиапарелли и другие . . . . .	200

О черк седьмой

В космос по спирали (203)

1. Малая тяга . . . . .	203
2. Параметры и парадоксы разгона . . . . .	205
3. Монотонная спираль разгона . . . . .	214
4. Произвольные траектории с малыми эксцентриситетами	220

О черк восьмой

Солнцем полны паруса (225)

О черк девятый

Гравилёт (243)

1. Притяжение тела конечных размеров . . . . .	243
2. Пульсирующий космический корабль . . . . .	244
3. Отстал от спутника — плыви брассом! . . . . .	251
4. Гравилёт и читатели . . . . .	254



О черк десятый

**Межпланетные полеты — малые тяги  
для больших целей (256)**

1. Вступление . . . . .	256
2. Побольше полезного груза, меньше топлива . . . . .	257
3. Принцип максимума Понтрягина . . . . .	260
4. Уравнение оптимального полета . . . . .	262
5. Откажемся от ограничений! . . . . .	265
6. Метод транспортирующей траектории . . . . .	266
7. Схема решения красной задачи . . . . .	269
8. Интегрирование . . . . .	270
9. О задачах относительного движения . . . . .	276
10. Результаты расчетов оптимальных межпланетных траекторий . . . . .	279
11. Представление результатов расчетов серий траекторий . . . . .	288
12. Коррекция межпланетных траекторий . . . . .	294

О черк одиннадцатый

**Относительное движение орбитальных тел (297)**

1. На орбитах — два спутника . . . . .	297
2. Уравнения относительного движения . . . . .	301
3. Свободное движение космонавта относительно спутника . . . . .	303
4. Леонов и заглушка . . . . .	306
5. Космический зонд . . . . .	309
6. Болеадорас в космосе . . . . .	311
7. Эволюция смешанного движения . . . . .	318
8. Пространственная связка тел . . . . .	325

О черк двенадцатый

**Космическая вертушка (327)**

1. Спутники «Протон» . . . . .	327
2. Как это было обнаружено . . . . .	329
3. Что было обнаружено . . . . .	332
4. Как это объяснить . . . . .	335
Литература . . . . .	345
Именной указатель . . . . .	354
Предметный указатель . . . . .	356

## ПОСВЯЩЕНИЕ

*Ферри Брен, рядовой австро-венгерской армии, окончательно выбился из сил. Была глубокая ночь, когда он вышел из лесу на проселочную дорогу. По дороге шел обоз. Силуэты редких возничих едва угадывались в темноте; хлюпала грязь под копытами лошадей. Ферри Брен, не колеблясь, завалился в идущую без возничего подводку, накрылся брезентом и заснул.*

*Его разбудили на рассвете толчком кулака в бок. Вокруг стояли возничие, солдаты российской армии. Незлобно поругиваясь, похохатывая и потыкивая кулаками, они отняли у Брена оружие и ранец. Словенский немец Ферри Брен, слегка испуганный, слез с подводки на осеннюю, грязную землю — землю России. Не зная еще, что это — навсегда. Что впереди — бои в составе интернационального красногвардейского полка. И полвека жизни и труда на новой Родине. И большая приемная семья, которую он вскормит и вырастит своим редким ремеслом театрального портного. И далекая могила на тихом Иркутском кладбище...*

*И что впереди — эта книга, посвященная его светлой памяти, Федора Иосифовича Брена, моего деда.*

В. Б.

## О Т А В Т О Р А

Бесконечно дышит вселенная,  
Мчат ракеты, как сгустки солнца.  
Это — ваши мечты и прозрения.  
Ваши знания. Ваши бессонницы.

*Р. Рождественский*

В этой книге рассказано о некоторых интересных теоретических исследованиях в механике космического полета, то есть в теории движения космических аппаратов. Отражены и некоторые новые задачи небесной механики.

Эта книга — не учебное пособие, и автор не стремится дать стройный обзор или систематическое изложение механики космического полета. Более того, многие интересные и первостепенной важности результаты останутся вне нашего поля зрения. Цель книги иная. В процессе своего бурного развития механика космического полета дала жизнь целому ряду задач, пленяющих своеобразной красотой и новизной. Мне хочется дать представление о тех любопытных и порой неожиданных достижениях последнего десятилетия, которые позволили взглянуть совсем по-новому на ряд старых, классических задач механики; показать связи классических задач с новыми результатами механики космического полета; рассказать о некоторых новых постановках и решениях, возникших в динамике космического полета.

Вместе с тем рассказ о задачах механики космического полета — это одновременно рассказ и о методах исследования. Механика космического полета использует методы и результаты теоретической механики, небесной механики, технических наук, многих разделов математики. Как модно сейчас говорить, механика космического полета родилась на стыке этих наук.

Задачи, которые будут описаны в книге, различны по значимости. Решения некоторых из этих задач уже легли в основу всем известных достижений (полеты спутников и лунных станций), решения других задач найдут свое практическое применение в не столь далеком будущем (полеты космических кораблей с двигателями малой тяги); возможно, некоторые вопросы, затронутые в книге, вообще лишены сиюминутной важности. Но все задачи, рассматриваемые в книге, объединяет одно немаловажное обстоятельство: они интересны

Во всяком случае, автор постарается показать это тем читателям, на которых он рассчитывает прежде всего, — студентам, специализирующимся по механике и начинающим задумываться над вопросом о более узкой специализации. Автор хочет помочь им сделать выбор!

Если эта книга хотя бы в малой степени поможет почувствовать, какой это удивительный и богатый событиями мир — механика космического полета, то автор будет считать свою задачу выполненной.

В книге такого характера не всегда удастся избежать длинных выкладок, но при этом автор старается показать, где возможно, красоту самого процесса исследования, приводящего к тому или иному результату. Упор делается на анализ результатов, который доводится до графиков и чертежей, а иногда — до чисел. Там, где это возможно, исследование проводится максимально наглядно, изящными геометрическими приемами. Типичный прием — геометрический анализ первых интегралов уравнений движения.

В тексте книги в «отступлениях» приводятся некоторые сведения из механики и математики, необходимые для чтения книги, но этот материал не должен утяжелять задуманного легкого стиля очерков. Автор не может отказать себе в удовольствии иногда, по ходу дела, выступить с несерьезным предложением или с неожиданной аналогией, взяв на вооружение некоторые приемы научно-популярной литературы. Однако основной математический аппарат книги — системы обыкновенных дифференциальных уравнений, в силу чего изложение, конечно, нельзя считать общедоступным.

Основной материал в книге доступен пониманию студентов третьего, четвертого (а возможно, и второго) курсов механико-математических, физико-математических и технических факультетов, а отдельные пункты может

разобрать дотошный школьник. Если же некоторые места книги покажутся попервоначально трудными и непонятными, то отчаиваться ни в коем случае не нужно. Их следует проработать с карандашом в руках.

Однако автор стремился по мере сил к легкости рассказа и упорно избегал «академической» сухости изложения. Там, где это не удалось, читатель будет снисходителен, понимая, что порой традиции сильнее желаний.

Автор надеется, что книга доставит несколько минут удовольствия и другим ее читателям: студентам старших курсов и аспирантам, преподавателям теоретической механики, инженерам и научным сотрудникам в области механики космического полета и смежных специальностей. Содержание и стиль предлагаемых очерков уже апробированы автором на этих категориях слушателей при чтении обзорных лекций в различных университетах страны.

В книге использованы публикации некоторых современных ученых — механиков и математиков. Но значительное место занимают также собственные исследования автора.

В целом в книге отражена лишь малая часть проблем и задач современной механики космического полета и небесной механики. В решении некоторых задач, описанных в книге, существенные успехи достигнуты лишь в самые последние годы. Но никакой наш успех не достаточно велик перед лицом природы. Нерешенных (и даже еще не поставленных) задач всегда было и будет больше, чем решенных. Исаак Ньютон говорил:

«Я не знаю, что скажет мир о том, что мне удалось сделать. Сам себе я всегда казался маленьким мальчиком, который, играя на берегу моря, находит то разноцветный камушек, то переливающуюся раковину, в то время как необозримый океан истины без конца и без края простирается передо мной».

Автору посчастливилось в течение многих лет учиться у выдающихся ученых-педагогов \*), сидеть на одной студенческой скамье с ныне известными исследователями и сотрудничать по работе с превосходными специалистами. Эта книга — скромная попытка отдать дань благодарности моим учителям, друзьям и коллегам.

---

\*) Назову прежде всего Владимира Васильевича Голубева, Николая Гурьевича Четаева, Аркадия Александровича Космодемьянского.

Автор выражает благодарность Дмитрию Евгеньевичу Охоцимскому за поддержку идеи этой книги; Владимиру Григорьевичу Демину — за тяжкий труд редактирования; Наталье Самуиловне Кониковой и Евгении Алексеевне Степановой — за труды по оформлению рукописи; Николаю Алексеевичу Парусникову и Георгию Рафаиловичу Сазыкину — за солидарность и энтузиазм.

Появление этой книги во многом обязано заботе Нины Александровны Белецкой. Автор признателен Тимуру Магометовичу Энееву, добрые советы которого использованы в работе над рукописью.

Особую благодарность автор выражает доктору физико-математических наук Игорю Васильевичу Новожилову — за прекрасные рисунки к этой книге.

Автор хотел бы отметить также роль специалистов-практиков, чьи успехи в развитии космической техники и освоении космического пространства стимулировали прогресс многих точных наук. Имена этих специалистов не примелькались на страницах журналов; они, как правило, не пишут книг и редко защищают диссертации. Но без их трудов немислимо было бы развитие механики, отраженное во многих диссертациях, и не были бы написаны многие книги. В том числе и эта.

*В. Белецкий*

# О НЕВОЗМУЩЕННОМ И ВОЗМУЩЕННОМ ДВИЖЕНИИ СПУТНИКА С ОТСТУПЛЕНИЕМ ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДАХ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ

— ...Любезный Фагот, покажи нам для начала  
что-нибудь простенькое.

М. Булгаков  
«Мастер и Маргарита»

## 1. Нам повезло

Рассказ начнем с описания некоторых классических результатов, слишком хорошо известных, чтобы быть интригующе интересными, но совершенно необходимых для дальнейшего изложения.

Фундамент, на котором построена небесная механика и механика космического полета, — это ньютоновский закон тяготения: две материальные точки, обладающие массами  $m$  и  $M$ , тяготеют друг к другу с силой

$$F = \frac{fmM}{r^2}, \quad (1.1.1)$$

где  $r$  — расстояние между точками, а  $f$  — универсальная постоянная тяготения, одна и та же для всей Вселенной ( $f = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{г} \cdot \text{сек}^2$ ).

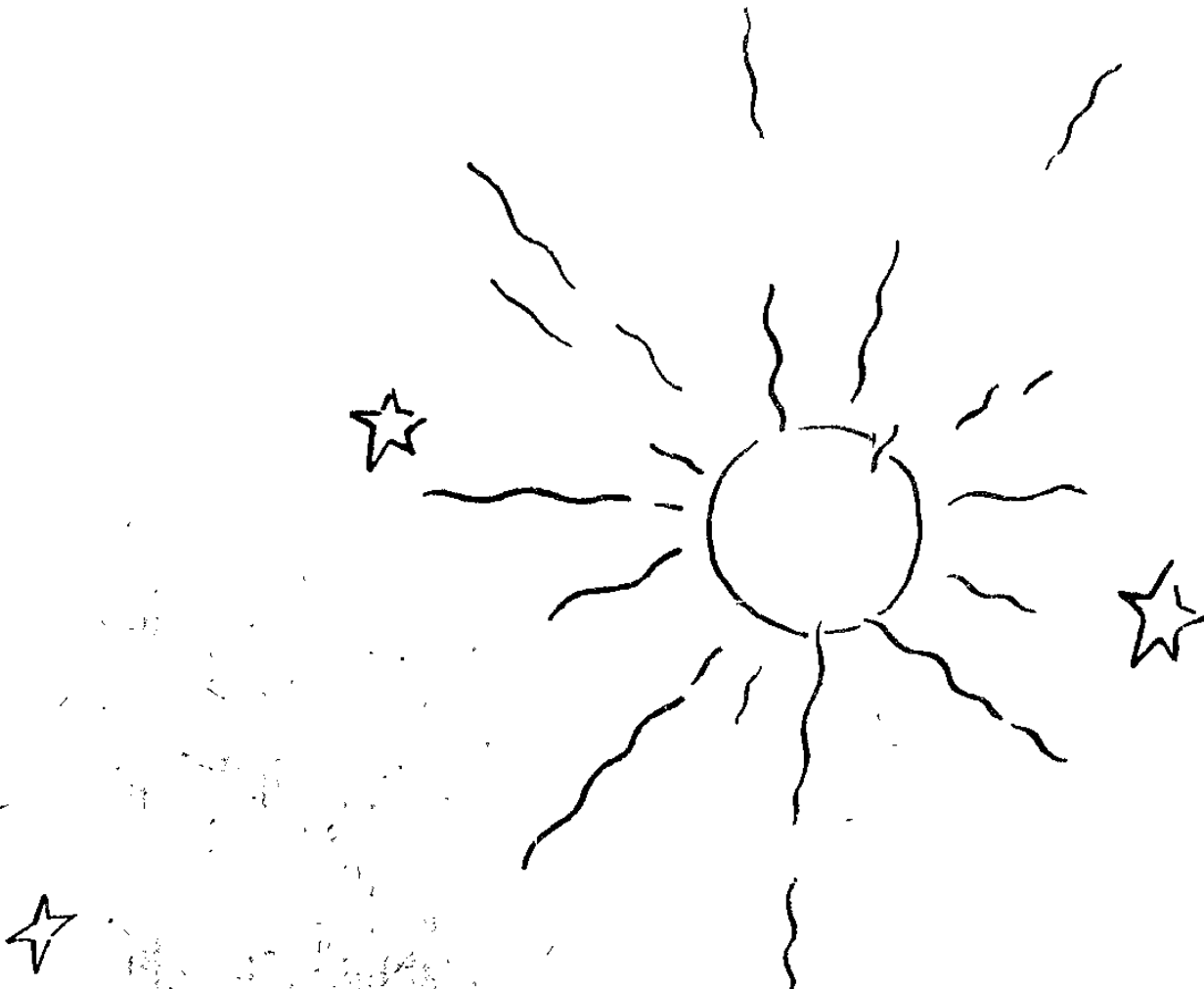
Если рассматривать движение одной из этих точек ( $m$ ) относительно другой ( $M$ ), считая, что можно пренебречь всеми силами, кроме силы (1.1.1), то дифференциальные уравнения движения получают вид [1.1] \*)

$$\ddot{x} + \frac{\mu x}{r^3} = 0, \quad \ddot{y} + \frac{\mu y}{r^3} = 0, \quad \ddot{z} + \frac{\mu z}{r^3} = 0, \quad (1.1.2)$$

где  $\mu = f(M + m)$ ,  $x, y, z$  — координаты точки  $m$  в поступательно перемещающейся системе координат с началом в точке  $M$ ;  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Эти уравнения легко интегрируются в элементарных функциях. Это обстоятельство столь значительно, что требует добавочного

---

\*) Библиографический список см. в конце книги.





обсуждения. В самом деле, мы пренебрегли «посторонними» силами, действующими на нашу точку  $m$ . Но эти силы существуют, и с их учетом уравнения

$$\ddot{x} + \frac{\mu x}{r^3} = f_x, \quad \ddot{y} + \frac{\mu y}{r^3} = f_y, \quad \ddot{z} + \frac{\mu z}{r^3} = f_z, \quad (1.1.3)$$

где  $f_x, f_y, f_z$  — компоненты добавочных ускорений. Уравнения (1.1.3), вообще говоря, уже не интегрируются. Почти все задачи механики, к сожалению, описываются неинтегрируемыми уравнениями. И лишь очень немногие задачи относятся к интегрируемым, как, например, задача о движении двух материальных точек под действием силы (1.1.1) взаимного тяготения.

Судьба распорядилась так, что человечество возникло и развилось на планете, входящей в систему одиночной звезды — Солнца, причем в эту систему входят планеты, находящиеся друг от друга достаточно далеко и имеющие массы, намного меньшие массы центрального светила — Солнца. При этих условиях в исследовании движения каждой планеты можно с большой точностью обойтись уравнениями (1.1.2), учитывающими только притяжение Солнцем данной планеты. В самом деле, «точные» уравнения типа (1.1.3) будут содержать добавки  $f_x, f_y, f_z$  при указанных условиях очень малые:

$$\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2} \ll \mu/r^2.$$

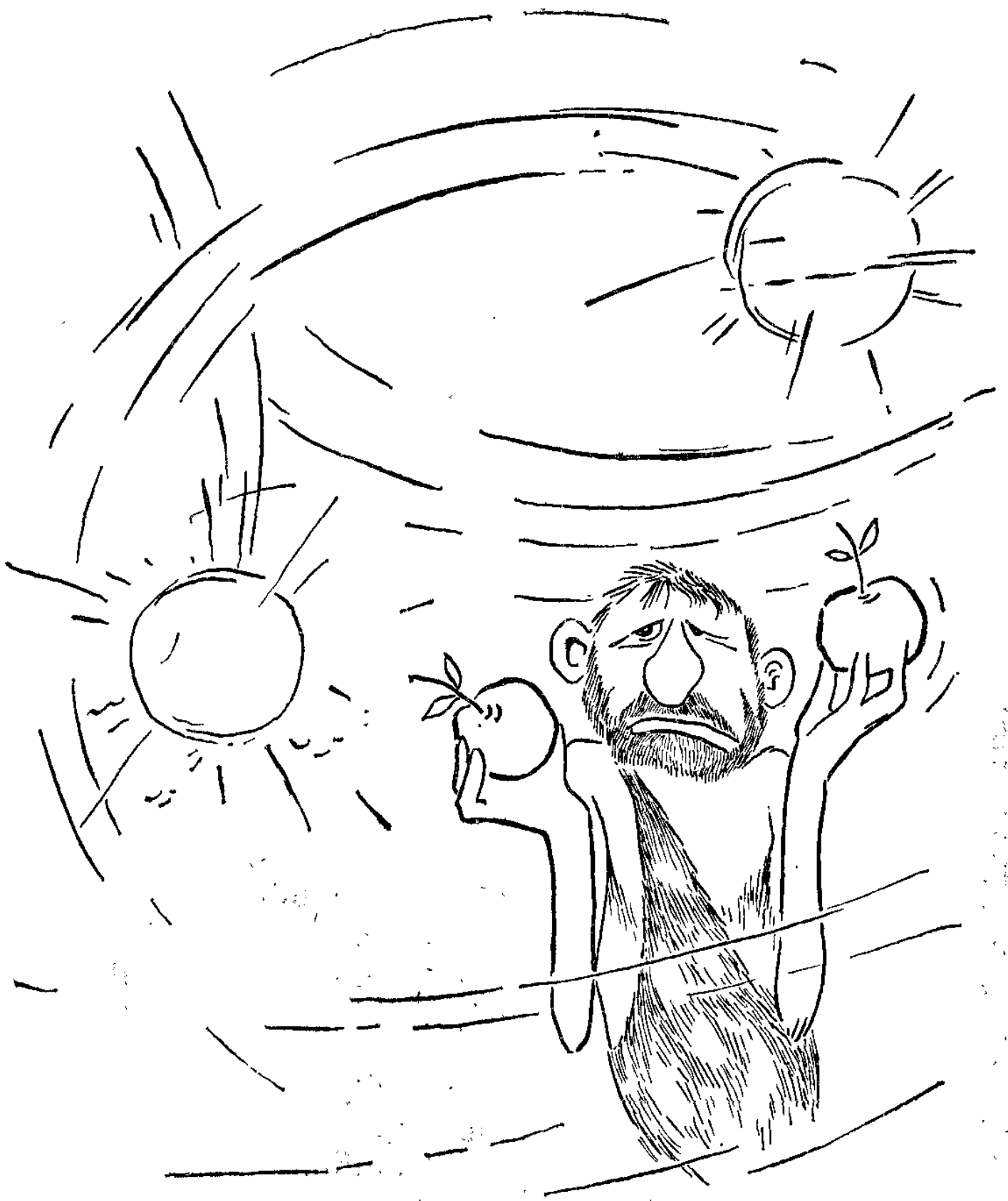
Поэтому в уравнениях (1.1.3) можно пренебречь правыми частями, то есть получить уравнения (1.1.2). А эти уравнения обладают двумя важнейшими свойствами:

1. Они интегрируются. 2. В результате их интегрирования оказывается, что движение весьма простое (периодическое).

Иначе говоря, в конструкции Солнечной системы кроется причина того, что, во-первых, движение каждой планеты сравнительно простое; во-вторых, это движение может быть описано интегрируемыми дифференциальными уравнениями. Это в свою очередь способствовало тому, что человечеству за сравнительно короткий срок \*) удалось, во-первых, постичь законы движения планет (Кеплер) и, во-вторых, объяснить их (Ньютон).

---

\*) Несколько тысячелетий существования цивилизации составляют менее одного процента времени существования вида *homo sapiens*.



Надо сказать, что большое количество звезд в Галактике представляет собой кратные звезды — двойные, тройные, а не одиночные, как наше Солнце. При условии существования в системе кратных звезд планет с устойчивыми орбитами (а такие орбиты могут быть) на какой-либо планете с такой орбитой могла возникнуть раса разумных существ [1.2]. Разумные существа, появившиеся на планете в системе двойной звезды, поставлены природой в худшие условия для познания ее законов, чем земное человечество. Действительно, движение планеты в системе двойной звезды будет описываться уравнениями (1.1.3) с непренебрежимыми правыми частями (влияние обеих звезд на планету сравнимо по величине). Поэтому траектория планеты будет очень сложной; для выявления ее закономерностей понадобится сравнительно большое время, и уж совсем трудно будет понять, что эти закономерности обусловлены простым законом (1.1.1) притяжения планеты к каждой из звезд. Так что тамошним Кеплерам и Ньютонам приходится туго. Проверкой справедливости закона (1.1.1) является однозначное сопоставление решения уравнений (1.1.3) с наблюдаемыми закономерностями; но уравнения (1.1.3) неинтегрируемы.

Путь познания у такой гипотической разумной расы будет более тяжек и медленен (достаточно только представить себе эпициклы Птолемея системы кратной звезды!). А так как темпы развития цивилизации зависят от суммы накопленных знаний, то можно, с некоторым риском для автора, формулировать следующее положение:

Развитие цивилизации в системах кратных звезд при прочих равных условиях \*) происходит медленнее, чем в системах одиночных звезд.

Поэтому можно считать, что нам повезло.

## 2. Кеплеровское движение

Так как масса планеты по сравнению с массой Солнца (или масса искусственного спутника по сравнению с массой Земли) пренебрежимо мала, то можно считать, что центр масс рассматриваемой системы совпадает с центром

---

\*) Автор не исключает возможности более быстрого пути познания, не использующего такого, в сущности, несовершенного аппарата, как дифференциальные уравнения, или даже существования качественно несопоставимых цивилизаций. В этом смысл оговорки «при прочих равных условиях».

масс большего тела. В дальнейшем, если не оговорено другое, будем понимать под центральным телом Землю, а под телом с пренебрежимой массой — искусственный спутник Земли.

Спутник обладает ускорением ньютоновской силы тяготения,

$$\mathbf{f}_{II} = -\frac{\mu}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad (1.2.1)$$

направленным к центру Земли. В формуле (1.2.1)  $\mathbf{e}_r$  — единичный вектор по направлению от центра Земли к спутнику (который считаем материальной точкой). Этому ускорению соответствует *силовая функция* ньютоновского центрального поля сил

$$U = \mu/r, \quad (1.2.2)$$

так что компоненты ускорения по осям  $x, y, z$  неподвижной системы координат, начало которой совпадает с центром Земли, будут равны

$$f_x = \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\mu x}{r^3}, \quad f_y = \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\mu y}{r^3}, \quad f_z = \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\mu z}{r^3}, \quad (1.2.3)$$

а уравнения движения (1.1.2) интегрируемы. Орбиты, удовлетворяющие этим уравнениям, назовем *кеплеровыми*.

Нас интересовал сам факт интегрируемости уравнений (1.1.2), а не процесс интегрирования. Этот процесс излагается во всех курсах теоретической и небесной механики (см., например, [1.1, 1.3]), и нет надобности излагать его еще раз. Поэтому опишем лишь конечные результаты интегрирования. Оказывается, что спутник движется по эллиптической, параболической или гиперболической орбите, такой, что с центром Земли совпадает фокус эллипса, параболы или гиперболы.

Нас будет интересовать в основном случай эллиптических орбит. На рис. 1.1 изображена такая орбита. В полярных координатах  $r, \nu$  уравнение эллипса имеет вид

$$r = \frac{fp}{1 + e \cos \nu}, \quad (1.2.4)$$

причем угол  $\nu$  отсчитывается от направления  $r_{\pi}$  из центра Земли к ближайшей точке орбиты — *перигею*. Наибольшее удаление  $r_{\alpha}$  спутника от Земли достигается в *апогее* — наиболее удаленной от Земли точке орбиты —

при значении  $\nu = 180^\circ$ . В уравнении (1.2.4) величины  $p$  и  $e$  постоянны;  $p$  называется *фокальным параметром* орбиты, и его геометрический смысл ясен из рис. 1.1; эта величина характеризует размер орбиты; вторая величина — *эксцентриситет* орбиты  $e$  — характеризует ее сжатие, вытянутость. При  $e = 0$  орбита круговая, а при  $e \rightarrow 1$  орбита стремится к параболической. Величины  $p$  и  $e$  можно выразить через апогейное ( $r_\alpha$ ) и перигейное ( $r_\pi$ ) расстояния:

$$p = \frac{2r_\alpha r_\pi}{r_\alpha + r_\pi}, \quad e = \frac{r_\alpha - r_\pi}{r_\alpha + r_\pi}. \quad (1.2.5)$$

Наибольший размер эллипса характеризуется его *большой полуосью*  $a$ , при этом

$$a = 1/2 (r_\alpha + r_\pi), \quad (1.2.6)$$

а между  $p$ ,  $e$ ,  $a$  существует связь

$$p = a (1 - e^2). \quad (1.2.7)$$

Угол  $\nu$  в формуле (1.2.4) называется *истинной аномалией*.

Зависимость  $\nu(t)$  от времени дает закон движения спутника по орбите. В теории кеплеровских орбит наиболее трудное место — отыскание явного выражения  $\nu$  через время  $t$ . Угловая скорость  $d\nu/dt$  движения по орбите удовлетворяет так называемому *интегралу* (или *закону*) *площадей*

$$r^2 \frac{d\nu}{dt} = \sqrt{\mu p}. \quad (1.2.8)$$

Если сюда подставить выражение  $r(\nu)$  из (1.2.4) и вычислить соответствующую квадратуру, то получим явное выражение времени через  $\nu$ :  $t = t(\nu)$ . Задача состоит в решении этого трансцендентного уравнения относительно  $\nu$ . Для этого вводится новая переменная  $E$ , называемая *эксцентрической аномалией* (смысл ее виден на том же рис. 1.1) и связанная с  $\nu$  соотношениями

$$\cos \nu = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}, \quad \sin \nu = \frac{\sin E}{1 - e \cos E} \sqrt{1 - e^2}, \quad (1.2.9)$$

причем

$$r = a (1 - e \sin E). \quad (1.2.10)$$

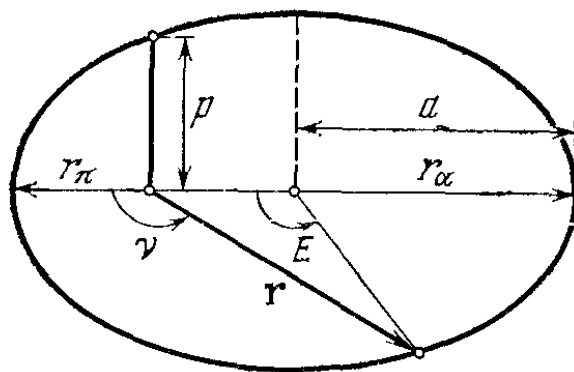


Рис. 1.1. Кеплеровская эллиптическая орбита.

Эксцентрическая аномалия  $E$  связана со временем  $t$  уравнением Кеплера:

$$E - e \sin E = n(t - \tau^*), \quad (1.2.11)$$

где  $n = \sqrt{\mu/a^3}$  — так называемое *среднее движение*; постоянная  $\tau^*$  обозначает *момент прохождения через перигей орбиты*. Из (1.2.11) легко следует, что период обращения спутника по орбите

$$T = 2\pi \sqrt{a^3/\mu}. \quad (1.2.12)$$

Если решить уравнение Кеплера (1.2.11) относительно  $E$ , то есть определить  $E(t)$ , то тем самым определится по (1.2.9) как явная функция времени и  $v = v(t)$ , а также  $r = r(t)$ . О методах и результатах решения уравнения Кеплера можно почитать в уже упомянутой книге Г. Н. Дубошина [1.1].

Наконец, модуль скорости  $V$  движения по орбите удовлетворяет соотношению

$$V = \sqrt{\mu/p} \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos v}, \quad (1.2.13)$$

причем ее радиальная и трансверсальная проекции соответственно равны

$$V_r = \sqrt{\mu/p} e \sin v, \quad V_\tau = \sqrt{\mu/p} (1 + e \cos v), \quad (1.2.13')$$

так что в перигее ( $v = 0$ ) скорость максимальна, а в апогее ( $v = \pi$ ) — минимальна. Так как движение происходит в консервативном поле сил (1.2.2), то, естественно, имеет место *закон сохранения энергии* (или *интеграл энергии*)

$$V^2/2 - \mu/r = h = \text{const}, \quad (1.2.14)$$

причем, подставляя сюда (1.2.13) и (1.2.4) и учитывая (1.2.7), можно обнаружить, что

$$h = -\frac{\mu}{2a}. \quad (1.2.15)$$

Отметим еще, что вместо интеграла площадей (1.2.8) можно написать векторный интеграл площадей

$$\mathbf{r} \times \mathbf{V} = \mathbf{c}, \quad (1.2.16)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор,  $\mathbf{V}$  — вектор скорости спутника. Тогда, как оказывается, вектор

$$\mathbf{l} = -\frac{\mu}{r} \mathbf{r} + \mathbf{V} \times \mathbf{c} \quad (1.2.17)$$

является постоянным (вектор Лапласа), то есть  $\mathbf{l}$  — интеграл уравнений движения. Этот вектор направлен вдоль большой полуоси по направлению в перигей орбиты, а его модуль

$$|\mathbf{l}| = \mu e. \quad (1.2.18)$$

Таковы основные закономерности кеплеровского движения по эллиптической орбите. Однако мы рассматривали движение в плоскости орбиты, а чтобы полностью определить движение в пространстве, надо еще знать пространственное положение орбиты. Это положение фиксируют следующим образом (рис. 1.2). Спроектируем плоскость орбиты на небесную сферу и рассмотрим систему координат  $XYZ$  такую, что ось  $Z$  направлена на Северный полюс мира (это вполне определенная точка на небесной сфере вблизи Полярной звезды), ось  $X$  — на точку весеннего равноденствия (тоже вполне определенная точка: в нашу эпоху находится в созвездии Рыб); начало координат совпадает с центром Земли, а плоскость  $XU$  — с плоскостью земного экватора. Линию пересечения плоскостей орбиты и экватора назовем *линией узлов*, а ее следы на небесной сфере — *узлами орбиты*. При этом назовем *восходящим узлом* орбиты ту точку на небесной сфере, в которой спутник пересекает экватор в своем движении из южного полушария в северное; противоположный узел называется *нисходящим*. Положение плоскости орбиты полностью определяется двумя постоянными углами: углом между направлениями на точку весеннего равноденствия и на восходящий узел — этот угол обозначим  $\Omega$  и назовем *долготой восходящего узла*; углом между экваториальной плоскостью и плоскостью орбиты — этот угол обозначим  $i$  и назовем *наклоением*. Далее, перигей  $\pi$  орбиты находится на постоянном угловом расстоянии  $\omega$  от линии узлов, угол  $\omega$  отсчитывается

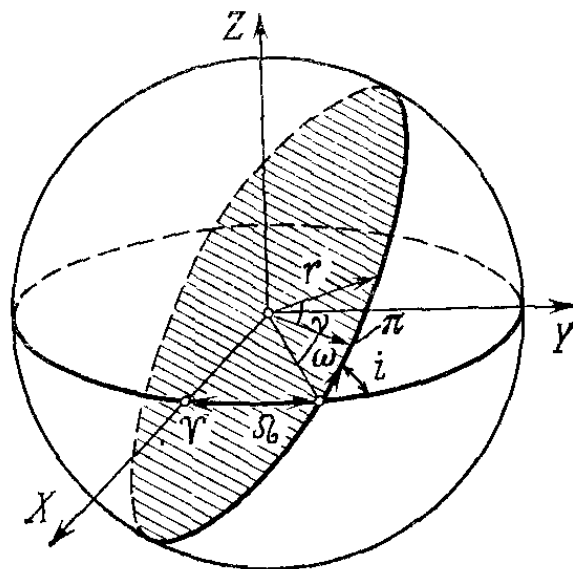


Рис. 1.2. Положение орбиты в пространстве.

в нашу эпоху находится в созвездии Рыб); начало координат совпадает с центром Земли, а плоскость  $XU$  — с плоскостью земного экватора. Линию пересечения плоскостей орбиты и экватора назовем *линией узлов*, а ее следы на небесной сфере — *узлами орбиты*. При этом назовем *восходящим узлом* орбиты ту точку на небесной сфере, в которой спутник пересекает экватор в своем движении из южного полушария в северное; противоположный узел называется *нисходящим*. Положение плоскости орбиты полностью определяется двумя постоянными углами: углом между направлениями на точку весеннего равноденствия и на восходящий узел — этот угол обозначим  $\Omega$  и назовем *долготой восходящего узла*; углом между экваториальной плоскостью и плоскостью орбиты — этот угол обозначим  $i$  и назовем *наклоением*. Далее, перигей  $\pi$  орбиты находится на постоянном угловом расстоянии  $\omega$  от линии узлов, угол  $\omega$  отсчитывается

от этой линии в плоскости орбиты до направления на перигей орбиты. Назовем угол  $\omega$  *аргументом перигея*. Часто вместо истинной аномалии  $\nu$  вводят в рассмотрение другой переменный полярный угол  $u = \omega + \nu$ , называемый *аргументом широты*. Это угол, отсчитываемый в плоскости орбиты от линии узлов до текущего радиуса-вектора орбиты.

Подведем итоги. Орбита спутника характеризуется двумя независимыми постоянными параметрами:  $p$  (или  $a$ ) и  $e$ ; положение орбиты в пространстве определяется тремя независимыми углами:  $\Omega$ ,  $\omega$ ,  $i$ ; положение спутника на орбите в каждый момент времени определяется параметром  $\tau^*$ . Итак, имеем шесть независимых постоянных параметров, полностью определяющих движение спутника в пространстве (его координаты и скорость в каждый момент времени), например:

$$a, e, \Omega, \omega, i, \tau^*. \quad (1.2.19)$$

Параметры (1.2.19) называются *элементами орбиты* спутника \*).

Обратим теперь внимание на следующее обстоятельство. Исходная система (1.1.2) дифференциальных уравнений движения является системой шестого порядка (три уравнения второго порядка); следовательно, решение системы (1.1.2) должно содержать шесть произвольных постоянных интегрирования. Как только значения этих постоянных будут определены через начальные (или краевые) условия, будет полностью определено данное конкретное движение. Так вот, элементы (1.2.19) как раз и являются такими произвольными постоянными интегрирования (их шесть, и они независимы). Начальные данные придают элементам конкретные числовые значения и определяют конкретное движение.

### 3. Возмущенное движение. Оскулирующие элементы

Кеплеровское движение, рассмотренное в предыдущем пункте (и удовлетворяющее уравнениям (1.1.2)), называют еще *невозмущенным движением* спутника. На самом же деле истинное движение спутника удовлетворяет

---

\*) Элементы орбиты могут быть определены по-разному. Например, положение плоскости орбиты можно отсчитывать не от плоскости экватора, а от плоскости эклиптики; вместо  $e$  и  $\omega$  рассмотреть две независимые их комбинации и т. п.



некоторым уравнениям типа (1.1.3), так как на спутник, кроме ньютоновской силы притяжения, вызывающей ускорение (1.2.3), действует еще большое количество разнообразных сил: сопротивление атмосферы, отличие силы притяжения Земли от ньютоновской силы, притяжения Луны и Солнца и т. д. Все перечисленные силы (и многие другие), как правило, весьма малы по сравнению с силой ньютоновского тяготения, то есть удовлетворяют условию  $\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2} \ll \frac{\mu}{r^2}$ . Поэтому учет этих сил дает лишь

некоторые малые добавки в уравнения движения, а именно компоненты  $f_x, f_y, f_z$  в правых частях уравнений (1.1.3).

Движение спутника, происходящее под одновременным действием силы ньютоновского притяжения к центру Земли и добавочных сил, называется *возмущенным движением*; уравнениями возмущенного движения являются уравнения (1.1.3). Конкретный вид компонент  $f_x, f_y, f_z$  возмущающего ускорения зависит от характера учитываемых возмущающих сил (или сопротивление атмосферы, или гравитационные возмущения, или световое давление и т. д., а то и все вместе в зависимости от характера задачи).

Уравнения (1.1.3) неинтегрируемы, и поэтому остро встает вопрос о способе исследования возмущенного движения. Здесь помогает следующее рассуждение. Так как возмущающие силы малы по сравнению с основной силой ньютоновского тяготения, то следует ожидать, что возмущенное движение в каком-то смысле мало отличается от невозмущенного кеплеровского движения. Значит, решение уравнений (1.1.3) надо искать в виде, близком к решению уравнений (1.1.2). А именно, будем считать, что возмущенное движение происходит по какой-то «эллиптической» орбите с элементами (1.2.19), но эти элементы уже не являются постоянными, а меняются со временем:

$$a(t), \quad e(t), \quad \Omega(t), \quad \omega(t), \quad i(t), \quad \tau^*(t). \quad (1.3.1)$$

Задача сводится тогда к отысканию явных зависимостей (1.3.1) от времени (в силу уравнений (1.1.3) возмущенного движения).

«Эллипс» с переменными элементами (1.3.1) называется *оскулирующим эллипсом*, а сами переменные элементы — *оскулирующими элементами*. Это название отражает некую

тесную (как говорил Н. Д. Моисеев \*), «интимную») близость возмущенной и невозмущенной орбит \*\*). Если неожиданно зафиксировать в некоторый момент  $t^*$  значения параметров (1.3.1), то движение пойдет по кеплеровскому эллипсу и будет в некоторой окрестности времени  $t^*$  весьма близким к движению (в этой же временной окрестности) с нефиксированными параметрами (1.3.1).

Чтобы составить дифференциальные уравнения для оскулирующих элементов (1.3.1), надо перейти от переменных  $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  к переменным (1.3.1), подставить в уравнения (1.1.3) и разрешить их относительно производных  $\frac{dp}{dt}, \frac{de}{dt}, \frac{d\Omega}{dt}, \frac{d\omega}{dt}, \frac{di}{dt}, \frac{d\tau}{dt}$  оскулирующих элементов. Нетрудно понять, что метод оскулирующих элементов является методом вариаций произвольных постоянных невозмущенного движения в силу уравнений возмущенного движения. Отметим основное правило оскулирующего движения: координаты  $x, y, z$  и компоненты скорости  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  выражаются через элементы одинаковым образом как в возмущенном, так и в невозмущенном движениях; только, повторим, в невозмущенном движении элементы постоянны, а в возмущенном — функции времени.

#### 4. Оскулирующая орбита экваториального спутника

Рассмотрим сравнительно простой пример, на котором можно проследить ряд эффектов возмущенного движения.

Пусть спутник движется в экваториальной плоскости Земли [1.16, 1.17]. Земля несколько сжата к своему экватору, поэтому сила, действующая на спутник, будет несколько отличаться от ньютоновской. Однако при движении спутника в плоскости экватора эта сила остается центральной, постоянно направленной к центру Земли. Выражение для центрального ускорения  $f$ , сообщаемого спутнику этой силой, имеет вид

$$f = -\frac{\mu}{r^2} - \varepsilon \frac{\mu R_0^2}{r^4}. \quad (1.4.1)$$

\*) Профессор Николай Дмитриевич Моисеев (1902—1955) — основатель московской школы небесной механики, многочисленные труды и педагогическая деятельность которого оказали существенное влияние на современное поколение небесных механиков.

\*\*\*) Оскулирующие элементы придуманы великим французом Лагранжем. *Oskulatio* (лат.) — поцелуй (см. Латинско-русский словарь, Гос. изд-во иностр. и нац. словарей, Москва, 1952, стр. 480).

Здесь первый член — обычное ньютоновское центральное ускорение, а второй член — возмущающее ускорение, вызванное сжатием Земли. При этом  $r$  — расстояние от спутника до центра Земли,  $R_0$  — экваториальный радиус Земли,  $\varepsilon$  — постоянная безразмерная величина, зависящая от степени сплюснутости Земли; для Земли можно принять  $\varepsilon = 0,0016$ . Ускорению  $f(r)$  соответствует силовая функция

$$U = \int f(r) dr = \frac{\mu}{r} + \varepsilon \frac{\mu R_0^2}{3r^3}.$$

Так как движение обладает силовой функцией  $U(r)$ , не зависящей явно от времени, то, как известно из механики, полная энергия движения будет сохраняться:

$$\frac{1}{2} V^2 - \frac{\mu}{r} - \varepsilon \frac{\mu R_0^2}{3r^3} = H_0. \quad (1.4.2)$$

А так как действующая сила — центральная, то уравнения движения должны допускать еще один первый интеграл — интеграл площадей (имеющий место при любых центральных силах)

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = c. \quad (1.4.3)$$

Здесь  $\varphi$  — полярный угол в полярной системе координат  $r, \varphi$ .

Попробуем теперь получить уравнения в оскулирующих элементах для нашей задачи. В невозмущенном движении интеграл площадей имеет вид (1.2.8). В возмущенном и невозмущенном движении левая часть интеграла площадей может быть записана как  $rV_n$ , где  $V_n$  — трансверсальная проекция скорости спутника. Но по основному правилу оскулирующего движения координаты ( $r$ ) и скорости ( $V_n$ ) выражаются через элементы одинаково как в возмущенном, так и в невозмущенном движении. Значит, постоянная  $c$  в интеграле площадей (1.4.3) нашего возмущенного движения будет записываться так же, как и правая часть (1.2.8). Следовательно,  $c = \sqrt{\mu p}$ , откуда  $p = \text{const}$  или, если угодно,

$$\frac{dp}{dt} = 0. \quad (1.4.4)$$

Это и есть первое из уравнений в оскулирующих элементах для нашего движения. Фокальный параметр оскулирующей орбиты остается постоянным.

Далее, учитывая выражения (1.2.14), (1.2.15) и (1.2.7), можем записать интеграл энергии (1.4.2) возмущенного движения в виде

$$\frac{\mu(e^2 - 1)}{2p} - \frac{\varepsilon \mu R_0^2}{3r^3} = H_0. \quad (1.4.2')$$

Дифференцируя по времени, получим

$$e \frac{de}{dt} = -\varepsilon \frac{p R_0^2}{r^4} \dot{r}.$$

Но, опять вспоминая основное правило оскулирующего движения, выражение для радиальной скорости  $\dot{r} = V_r$  следует записать в том же виде (1.2.13'), что и в невозмущенном движении. Тогда последнее уравнение принимает окончательный вид:

$$\frac{de}{dt} = -\varepsilon \frac{\sqrt{\mu p} R_0^2}{r^4} \sin \nu. \quad (1.4.5)$$

Разумеется, здесь  $r$  выражается формулой (1.2.4). Обратимся снова к интегралу площадей (1.4.3). Заметим, что  $\varphi = \nu + \omega$ , откуда интеграл площадей может быть записан в форме

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - \frac{dv}{dt}. \quad (1.4.6)$$

Следовательно, чтобы написать дифференциальное уравнение для третьего оскулирующего элемента  $\omega$ , нужно получить выражение  $dv/dt$  в возмущенном движении.

Возьмем из (1.2.13') выражение для радиальной скорости и запишем его в виде  $e \sin \nu = \sqrt{\frac{p}{\mu}} V_r$ . Дифференцируем по времени это выражение, учитывая, что в оскулирующем движении  $p = \text{const}$ . Получим

$$\frac{de}{dt} \sin \nu + \frac{dv}{dt} e \cos \nu = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \dot{V}_r.$$

Но из кинематики известно, что  $\dot{V}_r = \ddot{r} = (f_r + r\dot{\varphi}^2)$ , где  $f_r$  — полное радиальное ускорение. Оно задается формулой (1.4.1). С помощью интеграла площадей (1.4.3) выразим  $\dot{\varphi}$  через  $r$  и подставим в  $\dot{V}_r$ . Получим

$$\dot{V}_r \sqrt{\frac{p}{\mu}} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} \left( \frac{p}{r} - 1 \right) - \frac{\varepsilon \sqrt{\mu p} R_0^2}{r^4}.$$

Учитывая, что  $p/r - 1 = e \cos v$ , и используя явное выражение (1.4.5) для  $de/dt$ , окончательно находим

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - \frac{\varepsilon \sqrt{\mu p} R_0^2}{e r^4} \cos v. \quad (1.4.7)$$

Теперь немедленно из (1.4.5) следует

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\varepsilon}{e} \frac{\sqrt{\mu p} R_0^2}{r^4} \cos v, \quad (1.4.8)$$

и система дифференциальных уравнений (1.4.4); (1.4.5), (1.4.7), (1.4.8) замкнута относительно  $p$ ,  $e$ ,  $\omega$ ,  $v$ . Строго

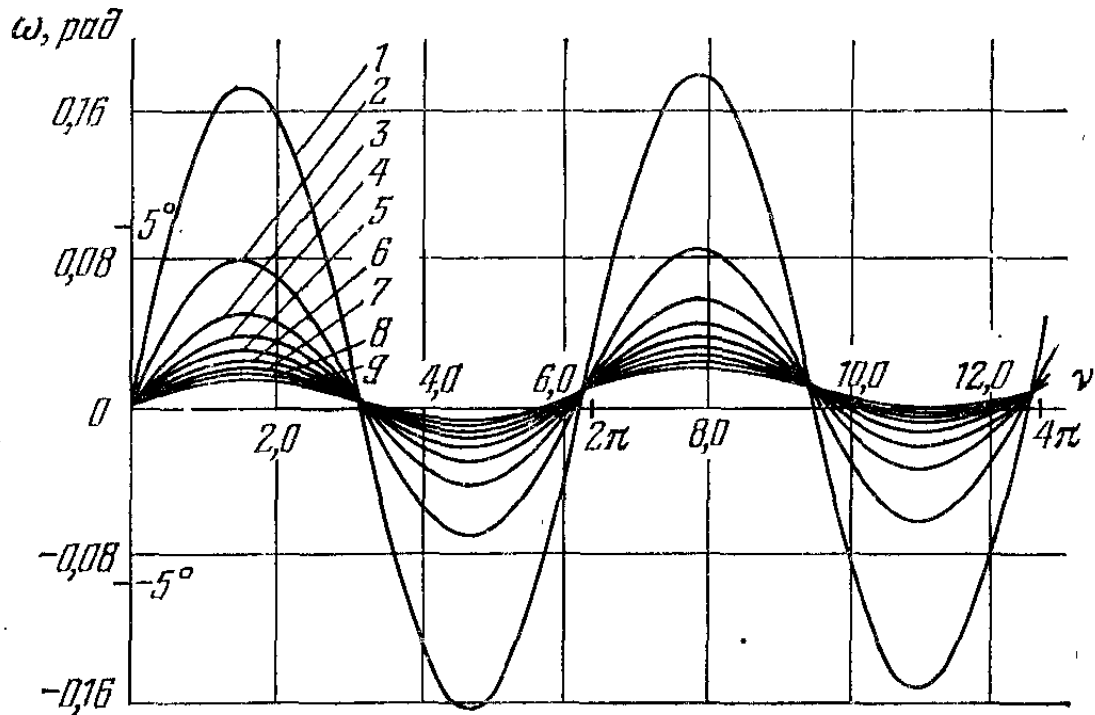


Рис. 1.3. Поведение оскулирующей долготы перигея орбиты для разных начальных значений эксцентриситета: 1)  $e_0 = 0,01$ , 2)  $e_0 = 0,02$ , ..., 9)  $e_0 = 0,09$ .

говоря, надо было бы добавить уравнение для  $\tau^*$ , но этого можно не делать, так как выписанных уравнений достаточно для анализа движения.

Прежде всего, обратим внимание, что при отсутствии сжатия Земли ( $\varepsilon = 0$ ) немедленно получаем, кроме  $p = p_0$ , еще и  $e = e_0$ ,  $\omega = \omega_0$  (как и должно быть в кеплеровском движении). Однако при  $\varepsilon \neq 0$  эксцентриситет  $e$  и долгота перигея  $\omega$  будут функциями времени — и именно это определяет отличие возмущенного движения от невозмущенного.

На рис. 1.3 представлены зависимости  $\omega(v)$ , а на рис. 1.4 — зависимости  $e(t)$  в оскулирующем движении

ля разных начальных данных. Эти зависимости получены численным интегрированием уравнений (1.4.4), (1.4.5), (1.4.7), (1.4.8). Видим, что эксцентриситет орбиты периодически меняется со временем с малой амплитудой и не имеет систематических (как принято говорить, *вековых*)

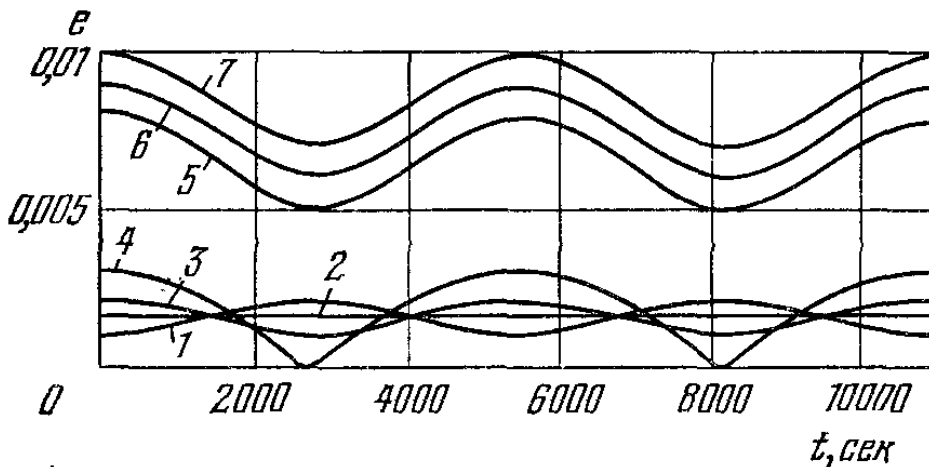


Рис. 1.4. Поведение оскулирующего эксцентриситета при разных его начальных значениях: 1)  $e_0 = 0,001$ , 2)  $e_0 = 0,0016$ , 3)  $e_0 = 0,002$ , 4)  $e_0 = 0,003$ , 5)  $e_0 = 0,008$ , 6)  $e_0 = 0,009$ , 7)  $e_0 = 0,01$ .

изменений, которые с течением времени могли бы привести к существенному отличию эксцентриситета от первоначального. Амплитуду колебаний эксцентриситета можно оценить, записав интеграл энергии (1.4.2) в виде

$$\frac{3}{2} (e^2 - e_0^2) = \varepsilon \frac{R_0^2}{p^2} [(1 + e \cos \nu)^3 - (1 + e_0)^3].$$

Отсюда следует, что в оскулирующем перигее ( $\nu = 0$ )  $e = e_{\max} = e_0$ . В оскулирующем апогее  $\nu = \pi$ ; приближенно решая кубическое относительно  $e$  уравнение, получим с точностью до первой степени  $\varepsilon$

$$e = e_{\min} \approx e_0 - 2\varepsilon \left( \frac{R_0}{p} \right)^2,$$

если только  $e_0 > 2\varepsilon \left( \frac{R_0}{p} \right)^2$ .

Тот факт, что оскулирующий эксцентриситет меньше в апогее, чем в перигее, означает, что кривизна траектории в апогее меньше, чем в перигее.

Рассматривая теперь графики  $\omega(\nu)$  (рис. 1.3), найдем, что, кроме периодических изменений положения перигея, имеет место его систематический, вековой уход, накапливающийся от оборота к обороту спутника. Этот

уход за один оборот спутника составит величину

$$\Delta = \int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{dt} \cdot \frac{dt}{dv} dv = \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon \frac{R^2}{p^2} (1 + e \cos v)^2 \cos v dv}{e - \varepsilon \frac{R^2}{p^2} (1 + e \cos v)^2 \cos v}.$$

Если  $e_0 > 2\varepsilon \left(\frac{R}{p}\right)^2$ , то этот интеграл можно вычислить приближенно с точностью до первой степени  $\varepsilon$ . Получим, положив  $e \approx e_0$ :

$$\Delta\omega = 2\pi\varepsilon \left(\frac{R_0}{p}\right)^2. \quad (1.4.9)$$

Итак, орбиту спутника можно представить как некоторую овальную фигуру постоянного размера ( $p = \text{const}$ ), более «острую» в перигее и менее «острую» в апогее, поворачивающуюся в своей плоскости на угол  $\Delta\omega$  (1.4.9) за один оборот спутника по орбите. Схематично орбита экваториального спутника Земли изображена на рис. 1.5.

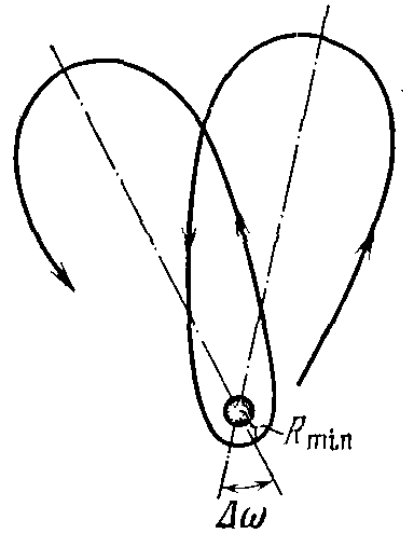


Рис. 1.5. Схематическое изображение орбиты экваториального спутника Земли.

Если  $e \sim \varepsilon$  или  $e \ll \varepsilon$ , то характер траектории не изменится, но поведение оскулирующих элементов меняется качественно и оскулирующая орбита может неожиданным образом отличаться по своему качеству от реальной орбиты.

Это особенно ясно на таком примере. Среди орбит экваториального спутника имеется строго круговая орбита с постоянной скоростью обращения спутника по этой орбите. Описывается ли эта орбита в терминах оскулирующих элементов тоже круговой орбитой?

Оказывается, нет. Фактической круговой орбите радиуса  $r_0$  соответствует следующее точное решение уравнений (1.4.4), (1.4.5), (1.4.7), (1.4.8):

$$v = 0, \quad e = e^* = \varepsilon \left(\frac{R_0}{r_0}\right)^2,$$

$$p = r_0 \left(1 + \varepsilon \frac{R_0^2}{r_0^2}\right), \quad \omega = \frac{\sqrt{\mu p_0}}{r_0^2} (t - t_0) + \omega_0.$$

Таким образом, круговая орбита описывается в оскулирующих элементах эллипсом, вращающимся с угловой

скоростью  $\dot{\omega} = \sqrt{\mu p_0}/r_0^2$ , причем спутник всегда находится в перигее этого эллипса ( $v \equiv 0$ ). Видим, что для сколь угодно малых возмущений ( $\varepsilon \neq 0$ ) в возмущенном движении может быть  $dv/dt \equiv 0$ , чего не бывает в невозмущенном движении.

Мы кончаем рассмотрение нашего примера — оскулирующего движения экваториального спутника. Из проведенного анализа видны основные свойства оскулирующего движения. Перечислим их. Оскулирующий эллипс, как правило (но не всегда), качественно отражает свойства реального движения; возмущения в оскулирующих элементах могут носить периодический и вековой характер. Наиболее существенны вековые возмущения, описывающие эволюцию движения; их следует выделять в первую очередь.

## 5. Уравнения в оскулирующих элементах. Элементы Делоне

Все сказанное в конце п. 4 верно и для более сложных случаев — произвольных (но малых) возмущающих сил и пространственности движения. Естественно, что вид уравнений в оскулирующих элементах для общего случая более сложен. Подробнее о получении этих уравнений можно прочитать в курсах небесной механики (например, в курсе Г. Н. Дубошина) [1.1]. Изящный и краткий вывод уравнений в оскулирующих элементах принадлежит А. И. Лурье [1.4].

В нашу задачу не входит повторение этих выкладок; однако для справок дадим полную сводку уравнений в оскулирующих элементах, отсылая за подробностями к цитированным выше работам.

Уравнения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned}
 1. \quad \frac{dp}{dt} &= 2r\tilde{T}, \\
 2. \quad \frac{de}{dt} &= \tilde{S} \sin v + \left[ \cos v + (e + \cos v) \frac{r}{p} \right] \tilde{T}, \\
 3. \quad \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\cos v}{e} \tilde{S} + \frac{\sin v}{e} \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \tilde{T} - \\
 &\quad - \frac{r}{p} \sin u \operatorname{ctg} i \tilde{W}, \\
 4. \quad \frac{di}{dt} &= \frac{r}{p} \cos u \tilde{W},
 \end{aligned} \right\} (1.5.1)$$



$$\left. \begin{aligned} 5. \quad \frac{d\delta\Omega}{dt} &= \frac{r}{p} \frac{\sin u}{\sin i} \tilde{W}, \\ 6. \quad \frac{d\tau^*}{dt} &= \frac{p}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \times \\ &\times \left[ (eN \sin v - \cos v) \tilde{S} + \frac{p}{r} N \tilde{T} \right] \frac{r^2}{p^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.5.1)$$

Здесь

$$N = 2 \frac{p^2}{r^2} \int_0^v \frac{\cos v \, dv}{(1 + e \cos v)^3}, \quad u = v + \omega.$$

Вместо уравнения для фокального параметра  $p$  можно пользоваться уравнением для большой полуоси  $a$ :

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2 e \sin v}{p} \tilde{S} + \frac{2a^2}{r} \tilde{T}. \quad (1.5.2)$$

Тогда, соответственно, в правых частях уравнений надо выразить  $p$  через  $a$  и  $e$  согласно (1.2.7). Здесь обозначено  $\tilde{S} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} S$ ,  $\tilde{T} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} T$ ,  $\tilde{W} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} W$ , где  $S$ ,  $T$ ,  $W$  —

соответственно радиальное, тангенциальное и нормальное возмущающие ускорения (рис. 1.6). Вместо  $r$  подразумевается выражение (1.2.4). Предполагается, что известен явный вид зависимости  $S$ ,  $T$ ,  $W$  от оскулирующих элементов и времени. Часто оказывается, что  $S$ ,  $T$ ,  $W$  зависят от времени не явно, а только через истинную аномалию  $v$  или аргумент широты  $u$ , которые входят в  $S$ ,  $T$ ,  $W$  явным образом.

Закон площадей (1.2.8) в возмущенном движении не имеет места. Аналогичная формула в возмущенном движении имеет вид

$$\begin{aligned} r^2 \frac{dv}{dt} &= \sqrt{\mu p} + \\ &+ \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[ \frac{\cos v}{e} S - \frac{\sin v}{e} \left( 1 + \frac{r}{p} \right) T \right]. \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

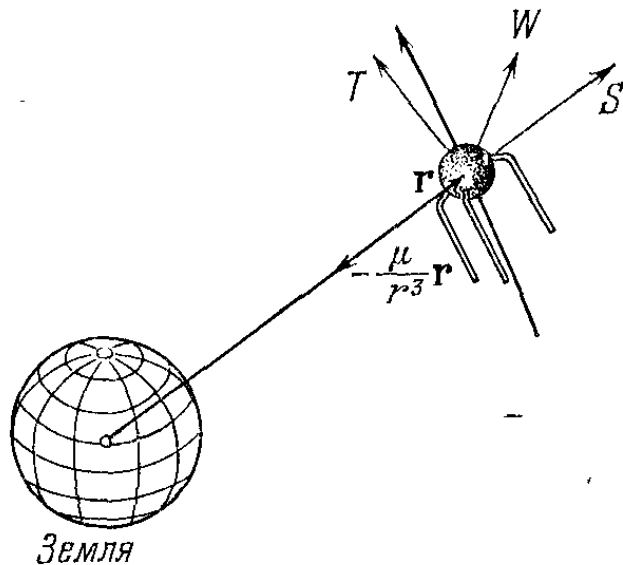


Рис. 1.6. Компоненты возмущающего ускорения.

Уравнения (1.5.1) в оскулирующих элементах имеют вид ничуть не более простой, чем уравнения (1.1.3) в координатах. Уравнения (1.1.3) в координатах даже «красивее» — симметричны и коротки. Если неинтегрируемы уравнения (1.1.3), то неинтегрируемы и уравнения (1.5.1) в оскулирующих элементах. Однако уравнения (1.5.1) имеют следующее преимущество: они сразу помогают понять отличие возмущенной траектории от невозмущенной. Действительно, правые части этих уравнений содержат возмущающие ускорения и обращаются в нуль, как только возмущающие ускорения исчезают. В этом последнем случае уравнения (1.5.1) сразу дают решение

$$p = \text{const}, \quad e = \text{const}, \quad \omega = \text{const}, \quad i = \text{const}, \\ \Omega = \text{const}, \quad \tau^* = \text{const},$$

то есть кеплеровскую траекторию.

Если же  $S$ ,  $W$ ,  $T$  не равны нулю, то, как это обычно бывает, они являются малыми величинами. Естественно ожидать, что тогда оскулирующие элементы в каком-то смысле мало отличаются от своих начальных значений. В этом случае к уравнениям (1.5.1) можно применить хорошо разработанные методы приближенного решения дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр. Применение этих методов к уравнениям (1.5.1) дает богатые результаты. Особенно эффективны при исследовании таких задач асимптотические методы нелинейной механики.

Понятие об асимптотических методах будет дано ниже. Эти методы позволяют неинтегрируемую задачу заменить такой интегрируемой задачей, решение которой приближенно, но с высокой степенью точности совпадает с неизвестным решением исходной неинтегрируемой задачи \*).

Мы ввели оскулирующие элементы, исходя из того, что возмущенное движение мало отличается от невозмущенного в силу малости возмущающих ускорений. Однако малые возмущения могут накапливаться с течением време-

---

\*) Разработки этих методов фактически начаты классиками небесной механики, и в знаменитом трактате А. Пуанкаре [1.5] этот метод уже достаточно широко используется для исследования движения. Дальнейшая разработка, обоснование и широкое внедрение асимптотических методов в теорию колебаний принадлежат Н. М. Крылову, Н. Н. Боголюбову, Ю. А. Митропольскому, В. М. Волосову и другим советским ученым [1.6, 1.7, 1.8].

ни. Возмущенное движение близко к невозмущенному на небольшом интервале времени, но по прошествии достаточно большого промежутка времени накопившиеся малые возмущения могут существенно исказить движение. И если теперь зафиксировать оскулирующие элементы на достигнутых значениях, то получим кеплерово движение по эллипсу, весьма далекому от первоначального. Эти долговременные изменения движения, или, как говорят, эволюция движения, представляют собой наиболее

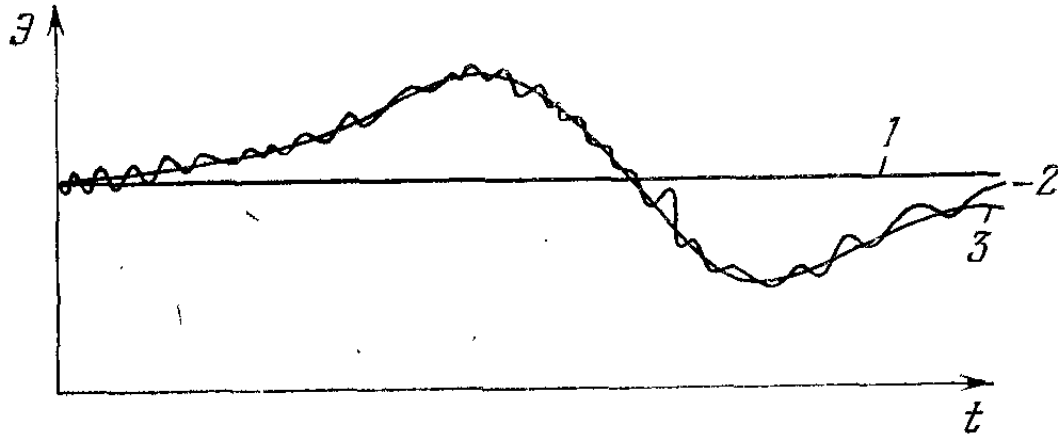


Рис. 1.7. График изменения оскулирующего элемента со временем: 1 — невозмущенное движение, 2 — возмущенное движение, 3 — эволюция движения.

важный объект в исследовании возмущенного движения. На рис. 1.7 дана схема изменения какого-либо оскулирующего элемента  $z$  со временем, она иллюстрирует введенные понятия.

Асимптотические методы позволяют на основе точных уравнений (1.5.1) в оскулирующих элементах получить уравнения приближенные, описывающие лишь эволюцию движения (кривая 3 на рис. 1.7); это описание будет достаточно точным на весьма большом (но, вообще говоря, конечном) интервале времени. Важно, что такие приближенные *эволюционные уравнения* часто оказываются интегрируемыми, что позволяет подробно исследовать качественную и количественную картину эволюции движения. При желании асимптотические методы позволяют построить и более высокие приближения к возмущенному движению, описывающие даже и мелкие вариации кривой 2 на рис. 1.7.

В небесной механике, а также в механике космического полета вместо классических оскулирующих элементов иногда выгодно употреблять некоторые их комбинации. Если возмущающие силы имеют силовую функцию  $U$ ,

то уравнения возмущенного движения имеют особенно симметричный вид, если их записать в так называемых *элементах Делоне*:

$$L, G, H, l, g, h. \quad (1.5.4)$$

Эти элементы вводятся через оскулирующие элементы (1.3.1) следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} L &= \sqrt{\mu a}, & l &= n(t - \tau^*), \\ G &= \sqrt{\mu a(1 - e^2)}, & g &= \omega, \\ H &= \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \cos i, & h &= \Omega. \end{aligned} \right\} \quad (1.5.5)$$

Предполагается, что силовая функция  $U$  выражена явно через элементы Делоне, и вводится гамильтонова функция

$$F = \frac{\mu}{2L^2} + U(L, G, H, l, g, h). \quad (1.5.6)$$

Тогда уравнения возмущенного движения принимают канонический вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H}. \end{aligned} \right\} \quad (1.5.7)$$

Такой вид уравнений особенно удобен для применения асимптотических методов, как будет показано несколько ниже \*).

Отметим следующее важное обстоятельство. В невозмущенном движении элементы  $L, G, H, g, h$  постоянны; при наличии малых возмущений эти элементы медленно эволюционируют. Их так и назовем *медленными переменными*. Элемент  $l$  в невозмущенном движении не постоянен, он меняется линейно со временем со скоростью  $l = n = \sqrt{\mu/a^3}$ ; в возмущенном движении элемент  $l$  сохранит примерно эту же быструю скорость своего изменения, лишь несколько искаженную за счет действия малых возмущений. Поэтому переменную  $l$  назовем *быстрой пере-*

\*) Вывод уравнений в элементах Делоне дается, например, в книге Г. Н. Дубошина [1.1].

менной. Разделение переменных на медленные и быстрые является характерной особенностью задач, для анализа которых удобно применять асимптотические методы исследования.

## 6. Отступление об асимптотических методах нелинейной механики. Колебания спутника около центра масс. Осреднение канонических уравнений

Описание асимптотических методов удобно начать с какого-либо характерного примера, а уж потом переходить к изложению более общих алгоритмов. Поэтому рассмотрим частную задачу о колебаниях спутника около центра масс.

На спутник, центр масс которого движется по орбите, действует момент гравитационных сил, стабилизирующий спутник относительно его радиуса-вектора. Об этом подробнее будет сказано в одном из следующих очерков. А здесь, имея в виду иллюстрировать асимптотические методы теории колебаний, рассмотрим уравнение плоских колебаний спутника на эллиптической орбите [1.17, 1.18]:

$$(1 + e \cos v) \delta'' - 2e \sin v \cdot \delta' + n^2 \sin \delta = 4e \sin v, \quad (1.6.1)$$

$$\delta = 2\theta, \quad n^2 = 3 \frac{A-C}{B}.$$

Здесь (рис. 1.8)  $v$  — истинная аномалия,  $e$  — эксцентриситет орбиты,  $\theta$  — угол между осью спутника, находящейся все время в плоскости орбиты, и его текущим радиусом-вектором;  $A$ ,  $B$ ,  $C$  — главные центральные моменты инерции спутника. Для определенности  $B > A > C$ , причем ось, которой соответствует момент инерции  $B$ , направлена нормально к плоскости орбиты. Штрихи в (1.6.1) означают производные по  $v$ .

Если бы орбита была круговая ( $e = 0$ ), то уравнение (1.6.1) имело бы решение  $\delta = 0$ , отвечающее относительному равновесию спутника (ось момента инерции  $C$  все время совпадает с радиусом-вектором спутника). При  $e \neq 0$  относительного равновесия не будет — спутник совершает колебания около направления радиуса-вектора. Эти колебания исследовать затруднительно, так как уравнение (1.6.1) неинтегрируемо. Однако можно ожидать, что при малых эксцентриситетах  $e$  существуют малые

колебания, описываемые линейным уравнением, которое получится из (1.6.1) заменой  $\sin \delta \approx \delta$ . С этого уравнения малых колебаний и начнем анализ.

Заменой  $\delta/2 \equiv \theta = z/(1 + e \cos \nu)$  переходим к новому уравнению:

$$z'' + \left( \frac{n^2 + e \cos \nu}{1 + e \cos \nu} \right) z = 2e \sin \nu,$$

которое, являясь линейным, все-таки неинтегрируемо из-за

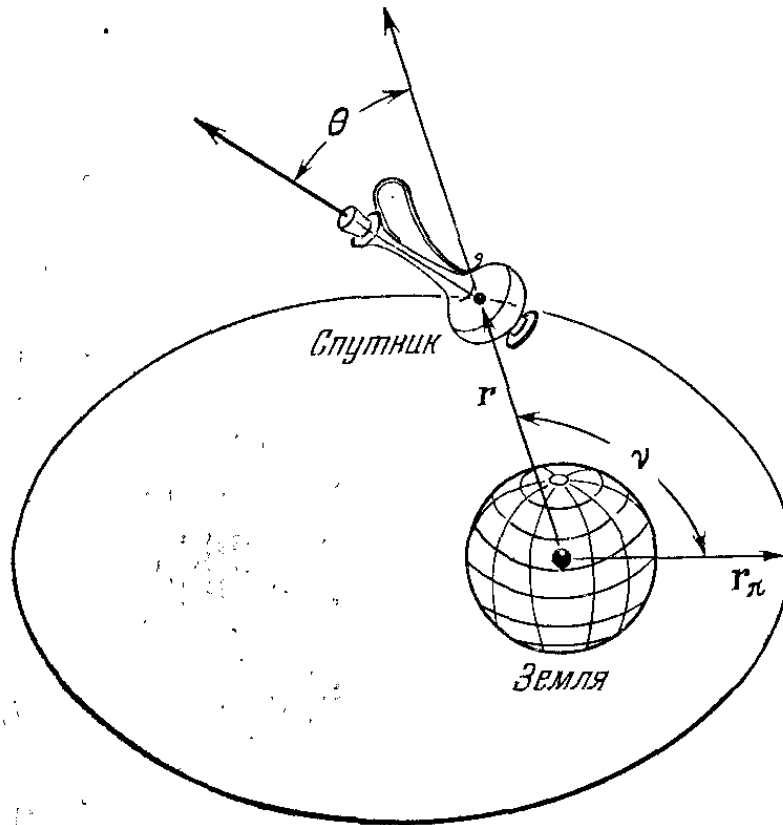


Рис. 1.8. Спутник на орбите.

переменности своих коэффициентов. Так как эксцентриситет орбиты  $e$  по предположению мал, то с точностью до первой степени  $e$  последнее уравнение можно записать так:

$$z'' + n^2 z = e [2 \sin \nu + (n^2 - 1) z \cos \nu]. \quad (1.6.2)$$

Обратим внимание, что при  $e = 0$  уравнение (1.6.2) имеет решение

$$z = a \cos \psi, \quad z' = -an \sin \psi, \quad (1.6.3)$$

в котором

$$\psi = n\nu + \psi_0.$$

Если (1.6.3) рассматривать просто как замену переменных (введение новых переменных  $a, \psi$  вместо  $z, z'$ ) в уравне-

нии (1.6.2), то это уравнение окажется эквивалентно системе

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dv} &= -\frac{1}{n} f(v, a \cos \psi) \sin \psi, \\ \frac{d\psi}{dv} &= n - \frac{1}{na} f(v, a \cos \psi) \cos \psi, \\ \frac{dv}{dv} &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (1.6.4)$$

где

$$f(v, z) = e [2 \sin v + (n^2 - 1) z \cos v].$$

Так как  $f$  мало вместе с  $e$ , то отсюда следует, что система (1.6.4) имеет одну медленную переменную и две быстрые ( $\psi$ ,  $v$ ). При  $e = 0$  имеем  $f = 0$  и из системы (1.6.4) получаем решение  $a = a_0$ ,  $\psi = nv + \psi_0$ , описывающее в силу (1.6.3) малые колебания на круговой орбите. При  $e \neq 0$  будем искать решение системы (1.6.4) в виде

$$\left. \begin{aligned} a &= \bar{a} + e\alpha_1(\bar{\psi}, \bar{a}, v) + e^2\alpha_2(\bar{\psi}, \bar{a}, v) + \dots, \\ \psi &= \bar{\psi} + e\beta_1(\bar{\psi}, \bar{a}, v) + e^2\beta_2(\bar{\psi}, \bar{a}, v) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (1.6.5)$$

Здесь функции  $\bar{a}(v)$ ,  $\bar{\psi}(v)$ ,  $\alpha_i(\bar{\psi}, \bar{a}, v)$ ,  $\beta_i(\bar{\psi}, \bar{a}, v)$  подлежат определению, причем функции  $\bar{a}$  и  $\bar{\psi}$  должны удовлетворять системе

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{a}}{dv} &= e\tilde{A}_1(\bar{a}) + e^2\tilde{A}_2(\bar{a}) + \dots, \\ \frac{d\bar{\psi}}{dv} &= n + e\tilde{B}_1(\bar{a}) + e^2\tilde{B}_2(\bar{a}) + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (1.6.6)$$

где  $\tilde{A}_i(\bar{a})$ ,  $\tilde{B}_i(\bar{a})$  — также подлежащие определению функции только медленной переменной  $\bar{a}$ . Решение исходной системы уравнений (1.6.4) в виде разложений (1.6.5), (1.6.6) по малому параметру  $e$  будем называть *асимптотическим решением* в том смысле, что при  $e \rightarrow 0$  оно стремится к точному решению исходной системы, если в ней положить  $e = 0$  (определяемые функции  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  для этого должны быть ограничены). Точность асимптотического решения зависит от количества взятых приближений. Можно утверждать, что если  $\bar{a}_n$  — решение  $n$ -го приближения в асимптотическом смысле, то  $|a - \bar{a}_n| \sim e^n$  на интервале времени  $t \sim 1/e$ . Иначе говоря, асимптоти-

ческий метод дает достаточно точное решение на ограниченном, вообще говоря, интервале времени.

Заметим, что уже исходное дифференциальное уравнение (1.6.2) нашей задачи записано с точностью лишь до первых степеней  $e$ , поэтому в (1.6.5) и (1.6.6) имеет смысл оставить лишь члены не выше первого порядка по  $e$ . Смысл замены переменных (1.6.5), (1.6.6) в том, что система (1.6.6) гораздо проще исходной системы (1.6.4) (и интегрируема в нашем случае), а функции  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  находятся с помощью простых выкладок. Таким образом, можно просто найти приближенное решение системы, точное решение которой не известно.

Вместо решения (1.6.5) — (1.6.6) системы (1.6.4) мы можем искать решение эквивалентной задачи прямо для исходного уравнения (1.6.2). С точностью до первых степеней  $e$  эта задача формулируется так:

найти решение уравнения (1.6.2) в виде

$$z = a \cos \psi + eu_1(\psi, a, \nu), \quad (1.6.7)$$

где  $u_1$  ограничена, а  $a$  и  $\psi$  удовлетворяют уравнениям

$$\frac{da}{d\nu} = eA_1(a), \quad \frac{d\psi}{d\nu} = n + eB_1(a), \quad (1.6.8)$$

причем  $A_1$  и  $B_1$  подлежат определению.

Подставляя (1.6.7) в (1.6.2) с учетом (1.6.8) и собирая члены не выше чем первого порядка малости, получим после преобразования

$$\begin{aligned} & -2en(A_1 \sin \psi + B_1 a \cos \psi) + \\ & + e \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} n^2 + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi \partial \nu} n + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \nu^2} \right) + n^2 eu_1 = \\ & = e \left\{ 2 \sin \nu + \frac{a(n^2 - 1)}{2} [\cos(\nu + \psi) + \cos(\nu - \psi)] \right\}. \end{aligned} \quad (1.6.9)$$

На  $e$  это уравнение можно сократить. В правую часть не входят гармоники  $\sin \psi$  и  $\cos \psi$ , поэтому  $A_1 = 0$ ,  $B_1 = 0$ . Отсюда

$$a = a_0, \quad \frac{d\psi}{d\nu} = n. \quad (1.6.10)$$

Заметим, что тот же результат получится, если *осреднить правые части системы (1.6.4) независимо по быстрым фазам  $\nu$  и  $\psi$* . Далее, при выполнении условий  $A_1 = B_1 = 0$



уравнение в частных производных (1.6.9) имеет решение

$$u_1 = \frac{2}{n^2 - 1} \sin v + \frac{1}{2} a (n^2 - 1) \left[ \frac{1}{2n - 1} \cos (v - \psi) - \frac{1}{2n + 1} \cos (v + \psi) \right], \quad (1.6.11)$$

Формулами (1.6.10), (1.6.11) искомое решение (1.6.7) уравнения (1.6.2) полностью определено. В первом приближении малые колебания на эллиптической орбите почти не отличаются от малых колебаний на круговой орбите, и можно ограничиться приближенным решением

$$z = a_0 \cos (n\psi + \psi_0).$$

Однако это решение теряет смысл, когда наступает резонанс между частотой  $n$  собственных колебаний и частотой «1» орбитального движения: при  $n \rightarrow 1$  согласно (1.6.11) колебания неограниченно возрастают — наступает резонанс. (Другой резонанс, так называемый *параметрический*, наступает при  $n = 1/2$ .) Но неограниченность колебаний несовместима с постановкой задачи (линейное уравнение (1.6.2) описывает лишь малые колебания). Поэтому в окрестности резонанса необходимо исследовать нелинейное уравнение.

С этой целью исходное уравнение (1.6.1) запишем в виде

$$\delta'' + n^2 \delta = f(v, \delta, \delta', \delta''), \quad (1.6.12)$$

где  $f = e [4 \sin v + 2\delta' \sin v - \delta'' \cos v] + n^2 (\delta - \sin \delta)$ , и будем считать величину  $f$  малой, что неизбежно предполагает одновременно малость эксцентриситета  $e$  и малое отличие  $\sin \delta$  от  $\delta$ . Кроме того,  $n^2$  близко к 1 по условию (окрестность резонанса). При  $f = 0$  решение имеет вид (1.6.3), где при резонансе следует еще положить  $n = 1$ . Будем искать и решение уравнения (1.6.12) в виде

$$\delta = a \cos \psi, \quad \psi = v + \kappa, \quad (1.6.13)$$

где  $a$  и  $\kappa$  — новые переменные. Как и в нерезонансном случае, уравнение (1.6.12) эквивалентно системе типа

(1.6.4), только записанной теперь в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dv} &= -\frac{1}{n} f(\psi - \kappa, a \cos \psi, -an \sin \psi, \\ &\quad an^2 \cos \psi) \sin \psi, \\ \frac{d\kappa}{dv} &= n - 1 - \frac{1}{na} f(\psi - \kappa, a \cos \psi, -an \sin \psi, \\ &\quad an^2 \cos \psi) \cos \psi, \\ \frac{d\psi}{dv} &= 1 + \frac{d\kappa}{dv}. \end{aligned} \right\} (1.6.14)$$

В силу малости  $f$  и близости  $n$  к единице наша система имеет уже две медленные переменные ( $a$  и  $\kappa$ ) и одну быструю ( $\psi$ ). Принципиальной разницы между системами (1.6.4) и (1.6.14) нет, и решение системы (1.6.14) тоже можно искать в виде, аналогичном (1.6.5) — (1.6.6), причем в первом приближении должно быть

$$\begin{aligned} \delta &= a \cos \psi, & \psi &= v + \kappa, \\ \frac{da}{dv} &= A_1(a, \kappa), & \frac{d\kappa}{dv} &= n - 1 + B_1(a, \kappa). \end{aligned}$$

Как и в рассмотренном выше случае, функции  $A_1(a, \kappa)$ ,  $n - 1 + B_1(a, \kappa)$  от медленных переменных  $a, \kappa$  получаются в процессе исполнения алгоритма как средние по быстрой переменной  $\psi$  правые части уравнений (1.6.14) для медленных переменных:

$$A_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( -\frac{1}{n} f \sin \psi \right) d\psi,$$

и аналогично  $B_1$ . Тогда в явном виде [1.17]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dv} &= -\frac{4e}{n+1} \cos \kappa \equiv -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa}, \\ \frac{d\kappa}{dv} &= \left[ \frac{n}{2} + \frac{n}{a} J_1(a) \right] - 1 + \\ &\quad + \frac{4e}{a(n+1)} \sin \kappa \equiv \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial a}, \\ \Phi(a, \kappa) &= \frac{4e}{n+1} a \sin \kappa + \\ &\quad + n \left[ \frac{a^2}{4} - (J_0(a) - 1) \right] - \frac{a^2}{2}. \end{aligned} \right\} (1.6.15)$$

Здесь  $J_0(a)$  и  $J_1(a)$  — функции Бесселя соответственно нулевого и первого порядка \*). Дифференцируя  $\Phi$  по  $\nu$ , в силу уравнений (1.6.15) обнаружим, что

$$\frac{d\Phi}{d\nu} = \frac{\partial\Phi}{\partial a} \frac{da}{d\nu} + \frac{\partial\Phi}{\partial \kappa} \frac{d\kappa}{d\nu} \equiv 0.$$

Значит, уравнения (1.6.15) имеют первый интеграл

$$\Phi(a, \kappa) = C_0 = \text{const},$$

который дает «амплитудно-фазовые» траектории (зависимость амплитуды  $a$  от фазы  $\kappa$  около резонансных траекторий). Пример таких траекторий изображен на рис. 1.9

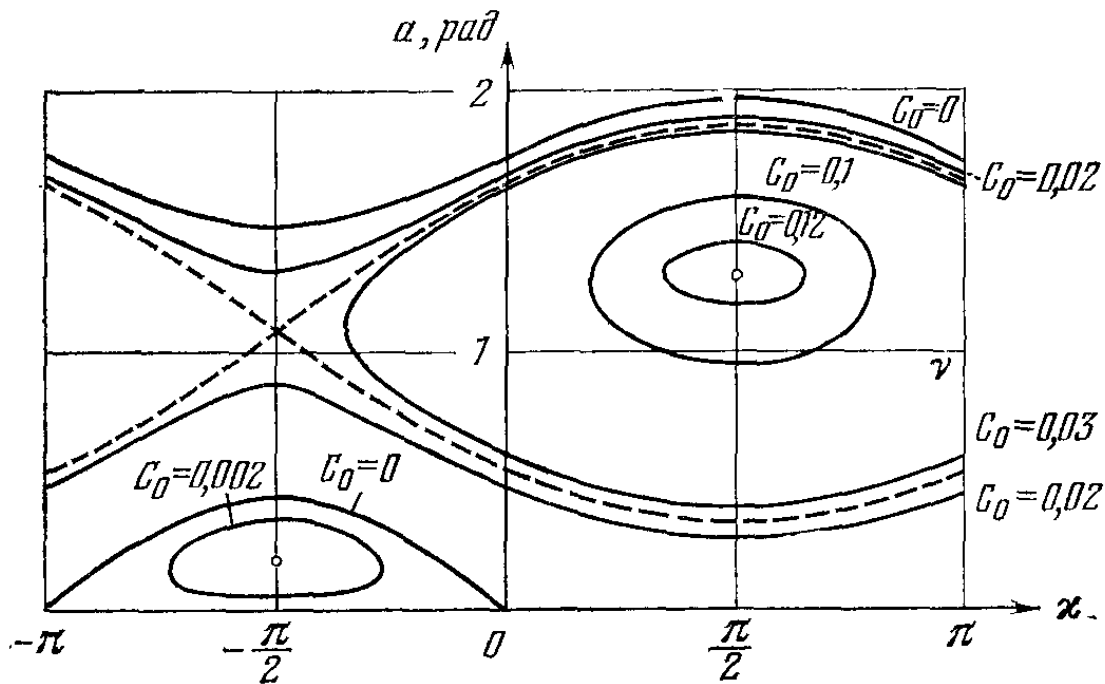


Рис. 1.9. Амплитудно-фазовые траектории ( $n^2 = 1,2$ ;  $e = 0,01$ ).

для разных значений  $C_0$ . Когда  $a(\nu)$  и  $\kappa(\nu)$  меняются (медленно) с изменением  $\nu$ , изображающая точка на плоскости  $a, \kappa$  обегает одну из интегральных кривых (рис. 1.9). Неподвижные точки на этом рисунке ( $\kappa = \pm \pi/2$ ,  $a = a_*$ ) отвечают периодическим колебаниям (с периодом  $2\pi$  по  $\nu$  и постоянной амплитудой); в любых других случаях амплитуда медленно колеблется между своими наибольшим и наименьшим значениями. Из (1.6.15) можно

\*) Из свойств функций Бесселя нам достаточно знать, что первые члены их разложений в ряд по аргументу имеют вид

$$J_1(a) = \frac{a}{2} - \frac{a^3}{4} + \dots, \quad J_0(a) = 1 - \frac{a^2}{2^2} + \frac{a^4}{2^6} - \dots$$

получить, что постоянная амплитуда  $a_*$  периодического режима связана с эксцентриситетом  $e$  и параметром  $n^2$  формулой

$$n^2 = \frac{a_* \pm 4e}{2J_1(a_*)}$$

Зависимость  $a_*(n^2)$  при фиксированном  $e$  изображена на рис. 1.10. Видно, что при  $e \approx 0,01$  и значениях  $n^2$ , далеких от резонанса, колебания спутника около радиуса-вектора будут происходить с амплитудой порядка  $0^\circ,5$ ,

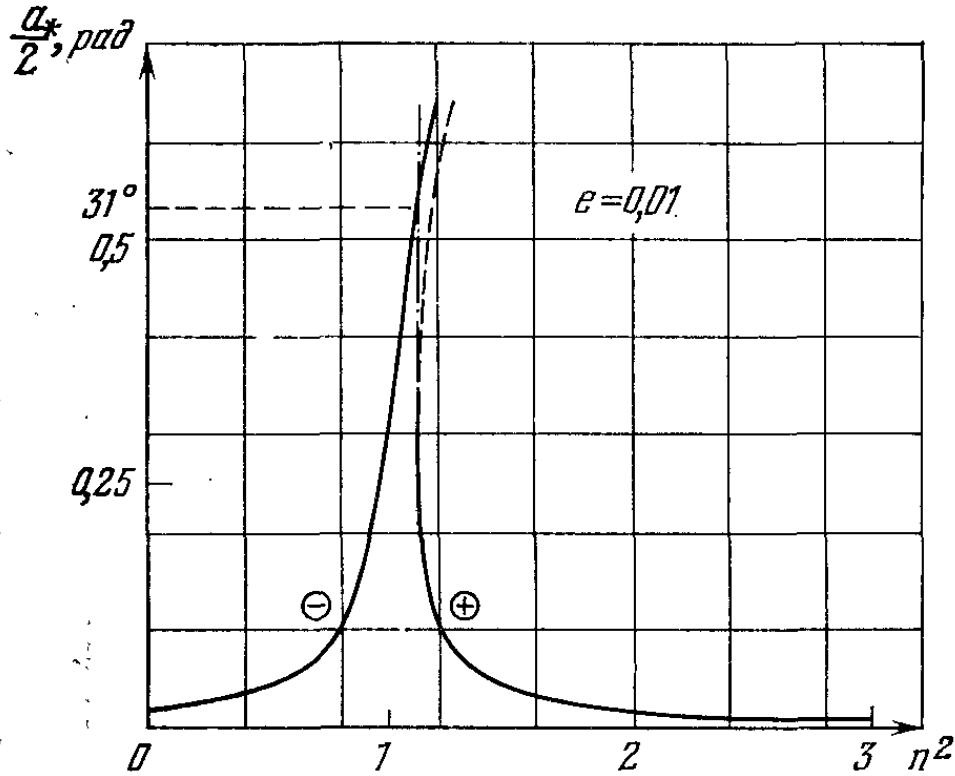


Рис. 1.10. Амплитудно-частотная характеристика ( $e = 0,01$ ).

а в резонансном случае ( $n^2 \sim 1$ ) — порядка  $30^\circ$ ! (Вообще,  $a_* \sim e$  при  $n^2 \gg 1$  и  $n^2 \ll 1$  и  $a_* \sim \sqrt[3]{e}$  при  $n^2 \sim 1$ .) И последнее: периодических решений может быть одно, если  $e > \sqrt{\frac{2}{27} \frac{(n^2 - 1)^{3/2}}{n}}$ , или три, если  $e < \sqrt{\frac{2}{27} \frac{(n^2 - 1)^{3/2}}{n}}$ .

Все это следует из (1.6.15). Таким образом, применение асимптотических методов позволило собрать богатую информацию о характере колебаний спутника.

Разобранный пример показывает, что:

1. Асимптотический метод применим тогда, когда благодаря наличию в системе уравнений малого параметра переменные можно разбить на «медленные» и «быстрые».

2. Уравнения первого приближения можно получить, осредняя исходные уравнения (приведенные к определенной форме) независимо по каждой из быстрых переменных; такое осреднение возможно, если между быстрыми переменными нет резонансных соотношений.

3. В противном случае приходится преобразовывать систему уравнений в окрестности резонанса; число медленных переменных при этом возрастает, а быстрых — соответственно уменьшается.

4. В то время как исходные уравнения движения неинтегрируемы, уравнения первого приближения асимптотического метода (осредненная система), возможно, окажутся интегрируемыми, что позволяет получить богатую информацию о поведении решения.

Полезно во всем этом убедиться, проследив основные идеи асимптотического метода в несколько более общем виде \*). Системы (1.6.4), (1.6.14), как и система дифференциальных уравнений возмущенного движения (1.5.7), имеют такую структуру:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon X(x, y, \varepsilon), \\ \dot{y} &= \omega(x) + \varepsilon Y(x, y, \varepsilon), \end{aligned} \right\} \quad (1.6.16)$$

где  $x$  — вектор медленных переменных, а  $y$  — вектор быстрых переменных,  $\varepsilon$  — малый параметр. Конкретно в уравнениях (1.5.7) имеется всего одна быстрая переменная  $l$ , но их может быть, вообще говоря, и больше; это обобщение мы и имеем в виду. То, что возмущенное движение подвержено малым возмущениям, мы подчеркнули введением явно написанного малого параметра  $\varepsilon \ll 1$ . Если  $\varepsilon = 0$ , то  $x = \text{const} = x_0$ ,  $y = \omega(x_0)t + y_0$ . Будем считать, что  $X$  и  $Y$  периодичны по быстрым переменным  $y$  с периодом  $2\pi$ . Будем искать решение системы (1.6.16) в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= \bar{x} + \varepsilon u_1(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon^2 u_2(\bar{x}, \bar{y}) + \dots, \\ y &= \bar{y} + \varepsilon v_1(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon^2 v_2(\bar{x}, \bar{y}) + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (1.6.17)$$

где  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  — новые переменные, а  $u_i$ ,  $v_i$  подлежат определению и должны быть выбраны так, чтобы переменные

---

\*) Для первоначального ознакомления с современным состоянием асимптотических методов нелинейных колебаний полезна книга Н. Н. Моисеева на эту тему [1.8]. В качестве примеров приложений асимптотических методов в ней разобрано много задач из динамики космического полета.

$\bar{x}, \bar{y}$  удовлетворяли новой системе дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \varepsilon A_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 A_2(\bar{x}) + \dots, \\ \dot{\bar{y}} &= \omega(\bar{x}) + \varepsilon B_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 B_2(\bar{x}) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (1.6.18)$$

Взяв то или иное количество членов в (1.6.17), получаем решение с той или иной степенью точности. Ясно, что система (1.6.18) гораздо проще исходной системы (1.6.16), так как быстрые и медленные переменные разделены. В таком разделении — суть асимптотических методов.

Потребуем ограниченности функций  $u_i, v_i$  (только в этом случае каждый последующий член в (1.6.17) будет мал по сравнению с предыдущим). Подставим (1.6.17) в (1.6.16) с учетом (1.6.18) и соберем члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . Получим системы уравнений в частных производных с известными правыми частями:

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial u_1}{\partial \bar{y}_i} \omega_i(\bar{x}) = X(\bar{x}, \bar{y}, 0) - A_1(\bar{x}),$$

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial v_1}{\partial \bar{y}_i} \omega_i(\bar{x}) = Y(\bar{x}, \bar{y}, 0) + \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial \omega}{\partial x_\alpha} u_1^\alpha(\bar{x}, \bar{y}) - B_1(\bar{x}),$$

.....

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial u_n}{\partial \bar{y}_i} \omega_i(\bar{x}) = g_n - A_n,$$

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial v_n}{\partial \bar{y}_i} \omega_i(\bar{x}) = h_n - B_n.$$

Здесь первые два уравнения соответствуют членам при  $\varepsilon$ , а последние два — при  $\varepsilon^n$ ;  $u_j, v_j, A_j, B_j$  — искомые вектор-функции;  $k$  — число быстрых переменных (и размерность векторов  $v_j, B_j, \omega_i, Y$ );  $m$  — число медленных переменных (и размерность векторов  $u_i, A_j, X$ );  $u_1^\alpha$  — « $\alpha$ -компонента» вектора  $u_1$ ; функции  $g_n, h_n, A_n, B_n$  явно выражаются через функции, найденные в предыдущих приближениях. Так как все уравнения в частных производных однотипны, то достаточно решить первое из этих уравнений, остальные решаются по аналогии.

Вектор-функция  $X$  по определению периодична по каждой из переменных  $y$  и, значит, разлагается в ряд Фурье

$$X(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{n_1, \dots, n_k} a_{n_1, \dots, n_k}^{(x)}(\bar{x}) e^{i(n_1 \bar{y}_1 + \dots + n_k \bar{y}_k)}.$$

Это позволяет искать  $u_1(\bar{x}, \bar{y})$  в виде

$$u_1(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{n_1, \dots, n_k} b_{n_1, \dots, n_k}(\bar{x}) e^{i(n_1 \bar{y}_1 + \dots + n_k \bar{y}_k)} + \sum_{i=1}^k c_i(\bar{x}) \bar{y}_i. \quad (1.6.19)$$

Подставляя это значение  $u_1$  в первое из написанных выше уравнений в частных производных, немедленно получим

$$\left. \begin{aligned} b_{n_1, \dots, n_k} &= \frac{a_{n_1, \dots, n_k}^{(x)}(\bar{x})}{i(n_1 \omega_1 + \dots + n_k \omega_k)}, \\ \sum_{i=1}^k c_i(\bar{x}) \omega_i(x) &= a_{0, \dots, 0}^{(x)}(\bar{x}) - A_1(x). \end{aligned} \right\} \quad (1.6.20)$$

В первой из этих формул хоть одно из  $n_i$  отлично от нуля. По условию ограниченности  $u_1$  все  $c_i$  должны быть равны нулю (иначе  $u_1$ , как видно из (1.6.19), неограниченно растет вместе с  $\bar{y}$ ). Но если все  $c_i = 0$ , то из (1.6.20) немедленно следует  $A_1(\bar{x}) = a_{0, \dots, 0}^{(x)}(\bar{x})$ . Но «нулевой» член ряда Фурье равен среднему значению разлагаемой функции. Итак,

$$\left. \begin{aligned} A_1(\bar{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^k} \underbrace{\int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi}}_k X(\bar{x}, \bar{y}, 0) dy_1, \dots, dy_k = \bar{X}, \\ u_1 &= \sum_{n_i \neq 0} \frac{a_{n_1, \dots, n_k}^{(x)}(\bar{x})}{i(n_1 \omega_1 + \dots + n_k \omega_k)} e^{i(n_1 \bar{y}_1 + \dots + n_k \bar{y}_k)} + \\ &\quad + b_{0, \dots, 0}^{(x)}(\bar{x}). \end{aligned} \right\} \quad (1.6.21)$$

Функция  $b_{0, \dots, 0}(\bar{x})$  произвольна и может быть определена из других соображений.

$$B_1 = \bar{Y} + \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial \omega}{\partial x_\alpha} u_1^\alpha,$$

$$v_1 = \sum_{n \neq 0} \frac{a_{n_1, \dots, n_k}^{(y)}(\bar{x})}{i(n_1 \omega_1 + \dots + n_k \omega_k)} e^{i(n_1 \bar{y}_1 + \dots + n_k \bar{y}_k)} + b_0^{(y)}(\bar{x}),$$

и так далее.

Однако все эти выкладки имеют смысл в том и только том случае, когда в системе нет никаких резонансов, то есть

$$n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 + \dots + n_k \omega_k \neq 0,$$

каков бы ни был набор целых чисел  $n_i$ . Иначе функции  $u_1$  и  $v_1$  не определены (бесконечно велики).

Если условие нерезонансности выполнено, то, обрывая ряды (1.5.3) на членах  $\varepsilon^{n-1}$ , получим на интервале времени  $t \sim 1/\varepsilon$  точность определения медленных переменных порядка  $\varepsilon^n$  и быстрых переменных порядка  $\varepsilon^{n-1}$ , так что

$$|x - \bar{x}| \sim \varepsilon^n, \quad |y - \bar{y}| \sim \varepsilon^{n-1}.$$

Стало быть, члены выше порядка  $\varepsilon^{n-1}$  в быстрых переменных и учитывать не стоит. В частности, *первое приближение* дает вместо уравнений (1.5.1) новые уравнения:

$$\left. \begin{aligned} x &= \bar{x}, & y &= \bar{y}, \\ \frac{d\bar{x}}{dt} &= \varepsilon A_1(\bar{x}), & \frac{d\bar{y}}{dt} &= \omega(\bar{x}), \end{aligned} \right\} \quad (1.6.22)$$

где  $A_1(\bar{x})$  определяется формулой (1.6.21).

Таким образом, асимптотический метод в первом приближении есть метод осреднения. Решение этих последних уравнений на  $t \sim 1/\varepsilon$  дает точность  $|x - \bar{x}| \sim \varepsilon$ ,  $|y - \bar{y}| \sim 1$ . Так как параметр  $\varepsilon$  обычно мал в силу малости возмущений, то интервал времени, на котором справедливо первое приближение, достаточно велик, чтобы можно было понять тенденции эволюции системы.

Быстрые переменные определяются с меньшей точностью, но это не важно, так как весь интерес обычно заключен в эволюции медленных переменных, а они асимптотически (по  $\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) близки к своим точным значениям (как уже отмечалось, в этом смысл названия «асимптотические методы»).



Замечательно, что уравнения первого приближения определяются так просто — независимым осреднением по каждой из быстрых переменных. Однако это имеет место лишь в нерезонансном случае. Если же найдется такой набор чисел  $n_i$ , что сумма

$$\sum_{i=1}^{i=k} n_i \omega_i = 0,$$

то есть имеется соизмеримость между частотами, то в окрестности этого резонанса величина

$$n_1 \vartheta = n_1 \bar{y}_1 + \dots + n_k \bar{y}_k$$

будет меняться медленно, так как ее производная

$$n_1 \dot{\vartheta} = \sum_{i=1}^{i=k} n_i \omega_i = \varepsilon h(x)$$

мало отличается от нуля. Поэтому проводить независимое осреднение по каждой из  $\bar{y}_i$  уже нельзя — осреднится медленная переменная  $\vartheta$ ! Но  $\vartheta$  можно рассматривать как новую независимую переменную. Вектор быстрых переменных обозначим  $z = (y_2, \dots, y_k)$ , и систему (1.6.16) можно теперь привести к виду

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon X^*(x, \vartheta, z, \varepsilon), & \dot{\vartheta} &= \varepsilon \theta^*(x, \vartheta, z, \varepsilon), \\ z &= \omega(x) + \varepsilon Z^*(x, \vartheta, z, \varepsilon). \end{aligned}$$

Эта система имеет ту же структуру, что и (1.6.16), только содержит на одну медленную переменную больше и на одну быструю переменную меньше. Задача свелась к предыдущей, так как число быстрых и медленных переменных не принципиально. Мы рассмотрим далее алгоритмы осреднения в резонансном и нерезонансном движениях для специально интересующего нас случая канонических уравнений возмущенного движения.

О с р е д н е н и е к а н о н и ч е с к и х у р а в н е н и й. Итак, дифференциальные уравнения первого приближения асимптотического метода получаются осреднением правых частей уравнений для медленных переменных по быстрым переменным, причем при осреднении подставляются невозмущенные значения переменных. Посмотрим, как будет выглядеть процесс осреднения для канонического (типа (1.5.7)) вида уравнений. Пусть  $\varepsilon_i$  —

медленная переменная, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{d\varepsilon_i}{dt} = \pm \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_j}, \quad (1.6.23)$$

а гамильтонова функция  $F$  зависит периодическим образом от быстрой переменной. В нашем случае быстрая переменная — одна (их может быть в общем случае и больше), а именно  $l$ ; обычно в задачах механики космического полета функция  $F$  зависит явно от истинной аномалии  $\nu(l)$ , а не от  $l$ ; поэтому можно записать

$$F = F(\nu(l)). \quad (1.6.24)$$

Быстрый период в нашем случае — период  $T = 2\pi/n$  обращения спутника по орбите, и осреднение правой части уравнения (1.6.23) будет выглядеть так:

$$\pm \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_j} \Big|_{\varepsilon_k = \bar{\varepsilon}_k} dl = \pm \frac{\partial}{\partial \varepsilon_j} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F dl = \pm \frac{\partial}{\partial \varepsilon_j} \bar{F}. \quad (1.6.25)$$

Здесь символ  $\varepsilon_k = \bar{\varepsilon}_k$  означает, что осреднение происходит при фиксированных значениях параметров  $\varepsilon_k$ .

Выпишем выражение  $\bar{F}$  несколько подробнее:

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\nu) \frac{dl}{d\nu} d\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F \frac{dl}{dt} \frac{dt}{d\nu} d\nu = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F n \frac{dt}{d\nu} d\nu. \end{aligned} \quad (1.6.26)$$

Здесь надо выразить  $\frac{dt}{d\nu}$  явно через  $\nu$  и элементы. Таким образом, осреднение функции  $F$  по быстрой переменной  $l$  эквивалентно осреднению той же функции  $\bar{F}$  по явно входящей истинной аномалии  $\nu$ , производимому с весом  $n \frac{dt}{d\nu}$ . Удобно ввести безразмерное время  $\tau = n t$  и новое среднее значение  $\bar{F} = \bar{F}/n$  функции  $F$ . Тогда окончательно:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varepsilon_i}{d\tau} &= \pm \frac{\partial \bar{F}}{\partial \varepsilon_j}, \\ \bar{F} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F \frac{dt}{d\nu} d\nu. \end{aligned} \right\} \quad (1.6.27)$$

Эволюционные уравнения (1.6.27) обладают следующими замечательными свойствами:

1°. Осреднение исходных точных уравнений движения эквивалентно осреднению силовой функции. Это значит, что для получения эволюционной системы *не надо* предварительно выписывать полную систему уравнений, а достаточно выписать характеристическую функцию  $F$ , осреднить ее и, зная  $\bar{F}$ , писать сразу эволюционные уравнения.

2°. Правые части системы (1.6.27) не зависят от  $\nu$  (по  $\nu$  мы осреднили), а значит, и от  $l$ , то есть  $\frac{\partial \bar{F}}{\partial l} = 0$ . Тогда из первого же уравнения Делоне следует

$$L = L_0, \quad (1.6.28)$$

или, иначе,

$$a = a_0. \quad (1.6.29)$$

Таким образом, *если возмущающая движение спутника сила консервативна, то большая полуось орбиты спутника не эволюционирует*, сохраняя в среднем постоянное значение. Это имеет место и для случая зависимости  $F$  от нескольких быстрых переменных  $l_1, l_2, \dots, l_k$ . Этот факт является отражением известной в небесной механике так называемой «теоремы Лапласа» о том, что большие полуоси планет не имеют вековых (то есть накапливающихся с течением времени) изменений (более подробно об этом можно прочитать в книге Г. Н. Дубошина [1.1]). Фактически «теорема Лапласа» строго была доказана лишь в недавнее время В. И. Арнольдом, после чего стала ясна и область применимости этой теоремы \*).

3°. Так как быстрая переменная  $l$  в первом приближении в возмущенном движении меняется так же, как в невозмущенном, а медленная переменная  $L$  не эволюционирует, то вместо шести уравнений движения эволюционная система содержит лишь четыре уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dG}{d\tau} &= \frac{\partial \bar{F}}{\partial g}, & \frac{dg}{d\tau} &= -\frac{\partial \bar{F}}{\partial G}, \\ \frac{dH}{d\tau} &= \frac{\partial \bar{F}}{\partial h}, & \frac{dh}{d\tau} &= -\frac{\partial \bar{F}}{\partial H}. \end{aligned} \right\} \quad (1.6.30)$$

---

\*) См. работы В. И. Арнольда [1.9, 1.10], а также очерк об устойчивости Солнечной системы в настоящей книге и отличную популяризацию В. Г. Демина [1.11].

4°. Функция  $F$  не зависит от  $\tau$ , значит, эволюционные уравнения (1.6.30) имеют первый интеграл

$$\bar{F} = \text{const.} \quad (1.6.31)$$

Таким образом, полная система уравнений в эволюционном движении имеет два первых интеграла движения: (1.6.28) и (1.6.31).

Мы до сих пор считали, что в наших уравнениях быстрая переменная — одна, а именно переменная  $l$ . Однако те же уравнения в элементах Делоне (1.5.7) могут содержать в выражении  $F$  другие быстрые переменные. Например, при исследовании влияния на спутник Луны и Солнца в  $F$  неизбежно войдут координаты Луны и Солнца, которые при определенных условиях можно считать тоже быстро меняющимися.

Но и в этом случае все выводы 1°—4° останутся справедливыми, только под средним значением  $\bar{F}$  надо понимать соответствующее значение  $F$ , осредненное по всем быстрым переменным, причем по каждой из них — независимо. Однако в этом случае (несколько быстрых переменных) может возникнуть качественно новая ситуация: соизмеримость частот быстрых переменных, или, как говорят, резонанс. Независимое осреднение по быстрым переменным (и, значит, все предыдущие выводы об эволюционном движении) действительно лишь при отсутствии резонанса. Если же имеет место резонанс, то исследование надо проводить особо и эволюционные уравнения принимают иной вид. Чтобы понять качественные особенности резонансных случаев, достаточно разобрать случай двух быстрых переменных.

Итак, пусть в уравнениях в элементах Делоне

$$F(\varepsilon_i, l, l_1), \quad (1.6.32)$$

где  $\varepsilon_i$  — медленные, а  $l, l_1$  — быстрые переменные, причем в невозмущенном движении положим, несколько изменив обозначения,

$$\frac{dl}{dt} = \omega = \text{const}, \quad (1.6.33)$$

$$\frac{dl_1}{dt} = \omega_1 = \text{const}. \quad (1.6.34)$$

Здесь будет удобнее считать, что  $F$  явно зависит от  $l$  и  $l_1$  (а не от каких-либо функций этих аргументов). Послед-

нее соотношение (1.6.34) сохраняется и в возмущенном движении (что, впрочем, не принципиально).

Пусть можно указать такие произвольные целые (положительные или отрицательные) числа  $n_0, m_0$ , что оказывается справедливым равенство

$$n_0 \omega + m_0 \omega_1 = 0. \quad (1.6.35)$$

Тогда говорят, что имеет место *резонанс*. Сумма

$$|n_0| + |m_0| \quad (1.6.36)$$

называется *порядком резонанса*. Если же при любых целых, положительных или отрицательных,  $n_0, m_0$  будет

$$n_0 \omega + m_0 \omega_1 \neq 0, \quad (1.6.37)$$

то имеем нерезонансный случай. Практически резонанс (1.6.35) надо рассматривать вместе с некоторой малой его окрестностью, так что  $n_0 \omega + m_0 \omega_1 = \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — малая величина. Если движение нерезонансно, то введение

$$\bar{F} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F(l, l_1) dl dl_1 \quad (1.6.38)$$

сводит эволюционные уравнения для медленных переменных  $\varepsilon_i$  к виду

$$\frac{d\varepsilon_i}{dt} = \pm \frac{\partial \bar{F}}{\partial \varepsilon_j}. \quad (1.6.39)$$

Здесь время  $t$  — размерное. Но для только что написанных уравнений (1.6.39) действительны все свойства 1°—4° эволюционных уравнений, в частности и «теорема Лапласа» об отсутствии эволюции большой полуоси орбиты. И эти свойства обобщаются на любое конечное число быстрых переменных, лишь бы между частотами быстрых переменных не выполнялось никакое резонансное соотношение.

Обратимся теперь к резонансному случаю. Так как  $F(l, l_1)$  периодична по  $l, l_1$ , то она может быть разложена в ряд Фурье

$$F(l, l_1) = \bar{F} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \{a_{nm} \sin(nl + ml_1) + b_{nm} \cos(nl + ml_1)\}. \quad (1.6.40)$$

Здесь  $\bar{F}$  дается формулой (1.6.38), а коэффициенты Фурье  $a_{nm}$ ,  $b_{nm}$ , как известно, легко вычисляются. Так как мы рассматриваем окрестность резонанса (1.6.35), то переменные  $\kappa_{nm} = nl + ml_1$  все *быстрые*, если только  $n \neq kn_0$ ,  $m \neq km_0$  одновременно ( $k = 1, 2, \dots$ ), и поэтому соответствующие члены могут быть *осреднены*, причем их средние значения суть *нули*. В формуле (1.6.40), кроме члена  $\bar{F}$ , следует оставить лишь члены, отвечающие одновременному присвоению значений  $n = n_0$ ,  $m = m_0$ . Переменная  $\kappa = n_0 l + m_0 l_1$  *медленная*, так как в окрестности резонанса (1.6.35) имеем

$$\frac{d\kappa}{dt} = n_0\omega + m_0\omega_1 = \varepsilon,$$

то есть  $\kappa$  меняется медленно. Поэтому вместо  $F$  можно записать следующие эволюционные члены:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{F}(\vartheta_i, l, l_1) &= \bar{F} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin k\kappa + b_k \sin k\kappa) \\ \bar{F}(\vartheta_i) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F dl dl_1, \\ a_k &= a_{kn_0, km_0}(\vartheta_i), \\ b_k &= b_{kn_0, km_0}(\vartheta_i). \end{aligned} \right\} (1.6.41)$$

Здесь под  $\vartheta_i$  подразумеваются пять медленных переменных:  $L, G, H, g, h$ .

Составим эволюционное уравнение для новой переменной  $\kappa$ :

$$\frac{d\kappa}{dt} = n_0 \frac{dl}{dt} + m_0\omega_1 = -n_0 \frac{\partial \tilde{F}}{\partial L} + m_0\omega_1.$$

Введем

$$\Phi(\vartheta_i, \kappa) = n_0 \tilde{F} - m_0\omega_1 L. \quad (1.6.42)$$

Тогда

$$\frac{d\kappa}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial L}, \quad \frac{dL}{dt} = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial l} = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \kappa} n_0 = \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa}.$$

А полная эволюционная система имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa}, & \frac{d\kappa}{dt} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{1}{n_0} \frac{\partial \Phi}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{1}{n_0} \frac{\partial \Phi}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{1}{n_0} \frac{\partial \Phi}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{1}{n_0} \frac{\partial \Phi}{\partial H}. \end{aligned} \right\} (1.6.43)$$

В выписанной системе все переменные медленные,  $\Phi = \Phi(L, G, H, \kappa, g, h)$  не зависит явно от  $t$ ; поэтому, как легко проверить, существует первый интеграл  $\Phi = \text{const}$ , или в развернутом виде

$$\{\bar{F}(L, G, H, g, h) + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k(L, G, H, g, h) \sin k\kappa] + b_k(L, G, H, g, h) \cos k\kappa\} n_0 - m_0 \omega_1 L = \text{const}. \quad (1.6.44)$$

Сказанного достаточно, чтобы понять, насколько глубоко резонансный случай отличается от нерезонансного. В функции  $\tilde{F}$ , кроме члена  $\bar{F}$ , существующего в нерезонансном случае, необходимо рассматривать добавку  $\Sigma(a_k \sin k\kappa + b_k \cos k\kappa)$ , зависящую от новой медленной переменной  $\kappa$  и вызванную исключительно резонансностью явления. Эти добавки в свою очередь ведут к тому, что эволюционная система будет содержать 6 уравнений, а не 4, как в нерезонансном случае. Исследование эволюционной резонансной системы поэтому представляет большие трудности, чем исследование нерезонансной системы.

В резонансном случае *не имеет места «теорема Лапласа» о сохранении величины большой полуоси орбиты*. Большая полуось эволюционирует. В резонансном случае эволюционная система имеет, как и в нерезонансном, первый интеграл, отражающий постоянство новой гамильтоновой функции. Однако структура этого интеграла существенно сложнее структуры аналогичного интеграла в нерезонансном движении.

## 7. Спутник в поле тяготения Земли

Анализ его движения может быть проведен только что изложенным методом осреднения.

Сила ньютоновского притяжения (1.2.1) и соответствующая силовая функция (1.2.2) лишь приближенно описывают силу притяжения, действующую на спутник со стороны реальной Земли. Если бы Земля была совершенно шарообразна и однородна или же состояла бы из однородных концентрических слоев, то формулы (1.2.1) и (1.2.5) были бы верны. На самом деле этого нет. Земля несколько «сплюснута» в направлении полюсов (в очень малой степени также и «с боков»), не совсем симметрична,

неоднородна, в результате чего поле сил, создаваемое Землей, имеет довольно сложную структуру. В качестве более хорошего, чем (1.2.2), приближения к реальному полю сил берут силовую функцию в следующем виде:

$$U = \frac{\mu}{r} \left\{ 1 + \sum_{k=2}^{\infty} I_k \left( \frac{R}{r} \right)^k P_k(\sin \varphi) \right\}, \quad \mu = fM. \quad (1.7.1)$$

Здесь  $M$  — масса Земли,  $f$  — универсальная постоянная тяготения,  $R$  — экваториальный радиус Земли,  $\varphi$  — географическая широта точки (отстоящей от центра Земли на расстоянии  $r$ ). Коэффициенты  $I_k$  имеют фиксированные безразмерные значения. Функции  $P_k$  представляют собой полиномы Лежандра, определяемые следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\ &\dots \dots \dots \\ P_n(x) &= \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \end{aligned} \right\} \quad (1.7.2)$$

Таким образом, силовая функция (1.7.1) зависит не только от расстояния до центра притяжения, как силовая функция (1.2.5), но еще и от широты места. Силовая функция (1.7.1) предполагает, что поле сил осесимметрично (относительно оси, проходящей через полюсы Земли). Более точное выражение для  $U$  учитывает и «боковую сплюснутость» поля сил, его несимметрию. Тогда  $U$  будет зависеть еще и от долготы места; однако для нас достаточно ограничиться выражением (1.7.1). Видим, что (1.7.1) представляет собой сумму ньютоновского потенциала (1.2.5) и добавочных членов, которые, по определению возмущений, должны быть малы по сравнению с основным (первым) членом. Действительно, по последним данным, коэффициенты  $I_k$  в (1.7.1) имеют такие значения:

$$\left. \begin{aligned} I_2 &= -1082,2 \cdot 10^{-6}, & I_3 &= 2,3 \cdot 10^{-6}, \\ I_4 &= 2,1 \cdot 10^{-6}, & \dots & \end{aligned} \right\} \quad (1.7.3)$$

так что даже самый большой из этих коэффициентов  $I_2$



дает добавку порядка десятой доли процента, а остальные коэффициенты — еще на несколько порядков меньше. Коэффициент  $I_2$  характеризует наиболее существенное отличие поля тяготения реальной Земли от идеальной шаровой. Это отличие вызвано заметным сжатием Земли в полярном направлении.

Рассмотрим влияние основного возмущения на движение спутника в поле тяготения Земли, пользуясь

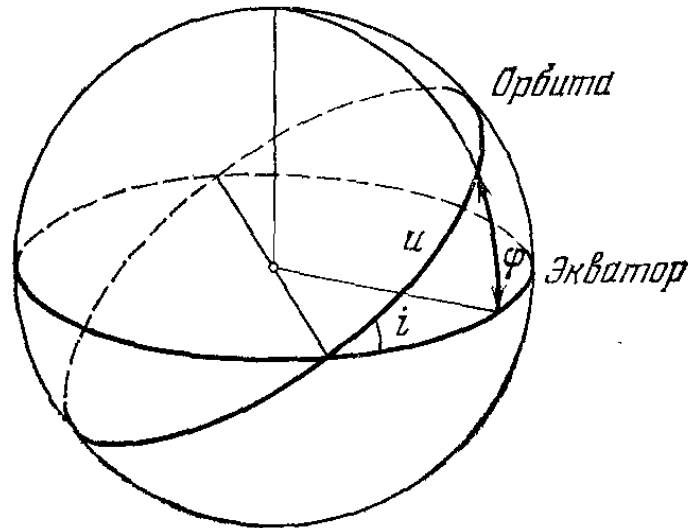


Рис. 1.11. Орбита спутника в экваториальной системе координат.

изложенными выше сведениями об асимптотических методах. Задача о движении спутника в поле тяготения «сжатой» Земли доставляет прекрасную иллюстрацию к асимптотическим методам нелинейной механики. Вместе с тем эта задача является одной из основных задач во всей теории движения искусственных спутников. Итак, возмущающая силовая функция

$$U = \frac{\mu}{r} I_2 \left( \frac{R}{r} \right)^2 \frac{1}{2} (3 \sin^2 \varphi - 1). \quad (1.7.4)$$

Вспоминая определение аргумента широты  $u = \omega + \nu$  и наклона  $i$  орбиты к экватору, можем, пользуясь вспомогательным чертежом (рис. 1.11), написать

$$\sin \varphi = \sin i \sin u. \quad (1.7.5)$$

Гамильтонова функция  $F$  отличается от  $U$  слагаемым, зависящим только от одной переменной  $L$ , а эта переменная, как показано в «Отступлении об асимптотических методах», не эволюционирует. Поэтому вместо среднего значения  $\bar{F}$  в четырех эволюционных уравнениях (1.6.30)

достаточно рассмотреть среднее значение  $\bar{U}$ . Это значение согласно формулам (1.7.4), (1.7.5), (1.6.27) определится так:

$$\bar{U} = \frac{\mu R^2 I_2}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [3\sin^2(\omega + \nu) \sin^2 i - 1] \frac{1}{r^3} \frac{r^2}{\sqrt{\mu p}} d\nu. \quad (1.7.6)$$

Подставляя  $r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}$  и производя необходимые действия, получим

$$\bar{U} = \frac{\sqrt{\mu} I_2 R^2}{4p^{3/2}} (1 - 3 \cos^2 i), \quad (1.7.7)$$

или, подставляя вместо оскулирующих элементов их выражения через элементы Делоне (что можно получить из формул (1.5.5)),

$$\bar{U} = \frac{1}{4} \frac{\mu^2 I_2 R^2}{G^3} \left(1 - 3 \frac{H^2}{G^2}\right). \quad (1.7.8)$$

Видим, что  $\bar{U}$  не содержит элементов  $g$ ,  $h$ . Поэтому, кроме интеграла

$$L = L_0,$$

уравнения движения имеют интегралы

$$G = G_0, \quad H = H_0.$$

В обычных оскулирующих элементах это значит, что

$$a = \text{const}, \quad e = \text{const}, \quad i = \text{const}. \quad (1.7.9)$$

Конечно, тогда и  $p = a(1 - e^2) = \text{const}$ . Итак, *сжатие Земли не меняет форму орбиты и ее наклонение к экватору* (уместно напомнить, что речь идет об основных эффектах движения, описываемых осредненными эволюционными уравнениями). Весь эффект эволюции оказывается заключенным в изменении элементов  $g$  и  $h$ , то есть в изменении долготы восходящего узла  $\Omega$  и аргумента перигея  $\omega$ . Эти изменения легко определяются подстановкой силовой функции (1.7.8) (вместо  $\bar{F}$ ) в оставшиеся эволюционные уравнения для  $g$  и  $h$  и обратным переходом от  $H$ ,  $G$  к оскулирующим элементам.

Результат таков:

$$\frac{d\Omega}{d\tau} = \frac{3}{2} I_2 \left(\frac{R}{p}\right)^2 \cos i, \quad (1.7.10)$$

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{3}{4} I_2 \left(\frac{R}{p}\right)^2 (1 - 5 \cos^2 i). \quad (1.7.11)$$

Итак, под влиянием сжатия Земли плоскость орбиты прецессирует со скоростью (1.7.10), а сама орбита, не меняя своей формы, прецессирует в своей плоскости со скоростью (1.7.11). Движение плоскости орбиты — попятное ( $I_2 < 0$ ,  $\cos i > 0$ ) (рис. 1.12). Для многих советских искусственных спутников наклон орбиты к плоскости экватора  $i \approx 65^\circ$ . При этом величина  $1 - 5 \cos^2 i$  мала и движение

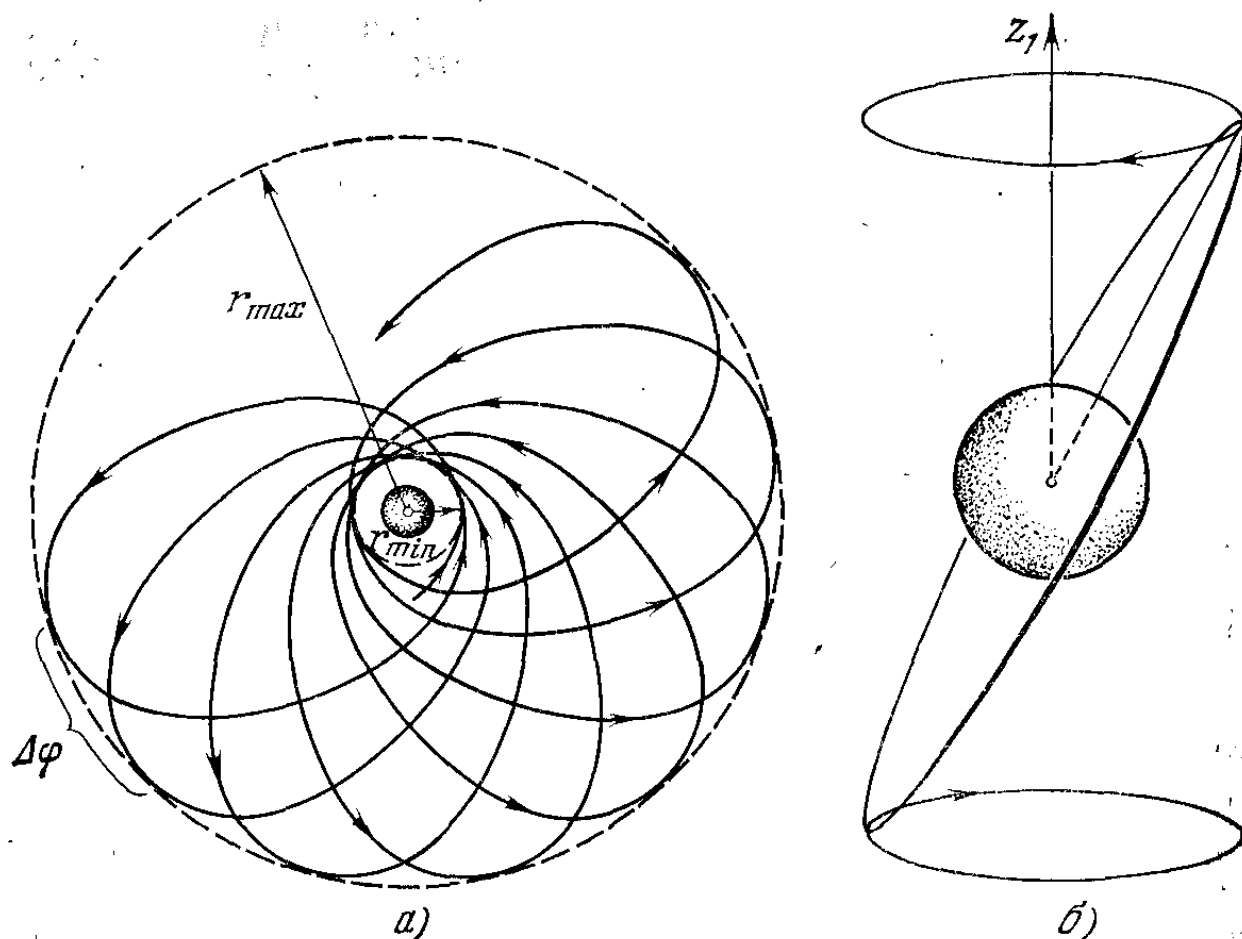


Рис. 1.12. Возмущенная орбита спутника в гравитационном поле Земли: а) движение в плоскости орбиты; б) движение плоскости орбиты.

перигея орбиты происходит очень медленно по сравнению с движением узла орбиты. Типичная скорость движения узла  $\sim 3$  градуса в сутки, скорость движения перигея  $\sim 0,5$  градуса в сутки.

Формулы (1.7.10), (1.7.11) опубликованы, например, в статье Д. Е. Охотимского, Т. М. Энеева, Г. П. Таратыновой в № 1а журнала «Успехи физических наук» за 1957 год [1.12] \*). В этой статье речь идет также о

\*) В этом номере журнала в преддверии запуска 1-го советского искусственного спутника (4 октября 1957 года) группа ученых-механиков опубликовала свои уже законченные работы по динамике искусственных спутников Земли и траекториям лунных перелетов.

возмущениях в движении спутника, вызываемых действием верхней атмосферы. Ведь на тех высотах, где летает спутник, атмосфера хотя и очень разрежена, но все-таки достаточно существенна, чтобы затормозить движение спутника. Он понемногу из-за этого приближается к Земле (и в конце концов падает на Землю). В настоящей книге не будет рассматриваться влияние атмосферы на орбиту; интересующийся этими вопросами читатель может найти подробный анализ невозмущенного и возмущенного движения спутника в книгах Д. Е. Охоцимского [1.13] и П. Е. Эльясберга [1.14]. Отличный материал о проблемах механики космического полета изложен в книге М. Б. Балка [1.15], в которой, в частности, обращает на себя внимание читателя пункт «Парадокс спутника» (стр. 287). Этот парадокс в книге М. Б. Балка сформулирован так: «Вследствие торможения атмосферой линейная скорость спутника, движущегося по орбите, близкой к круговой, возрастает; ускорение в направлении движения оказывается таким же, каким бы оно было, если бы сила лобового сопротивления изменила свое направление и толкала бы спутник вперед» (! — В. Б.).

Если читатель (с карандашом и бумагой в руках) не сможет сам догадаться, почему получается этот парадокс, то стоит прочитать об этом в книге М. Б. Балка (см. также очерк седьмой).

Ряд эффектов динамики искусственных спутников, особенно аэродинамические эффекты, обсуждаются в обзорной статье Л. И. Седова [1.19].

**О ВТОРОМ РОЖДЕНИИ СТАРОЙ ЗАДАЧИ,  
ИЛИ ЧТО ПОЛУЧИТСЯ, ЕСЛИ ДВЕ МАССЫ  
ПОМЕСТИТЬ НА ЧИСТО МНИМОЕ РАССТОЯНИЕ  
ДРУГ ОТ ДРУГА**

...И чем больше он смотрел на шнурок колокольчика, тем больше он чувствовал, что он где-то видел что-то очень похожее... Где-то совсем в другом месте, когда-то раньше...

*А. А. Милн*

«Винни-Пух и все, все, все»

- А потом?
- Тогда мы все скажем «АГА».
- Все трое?
- Да.

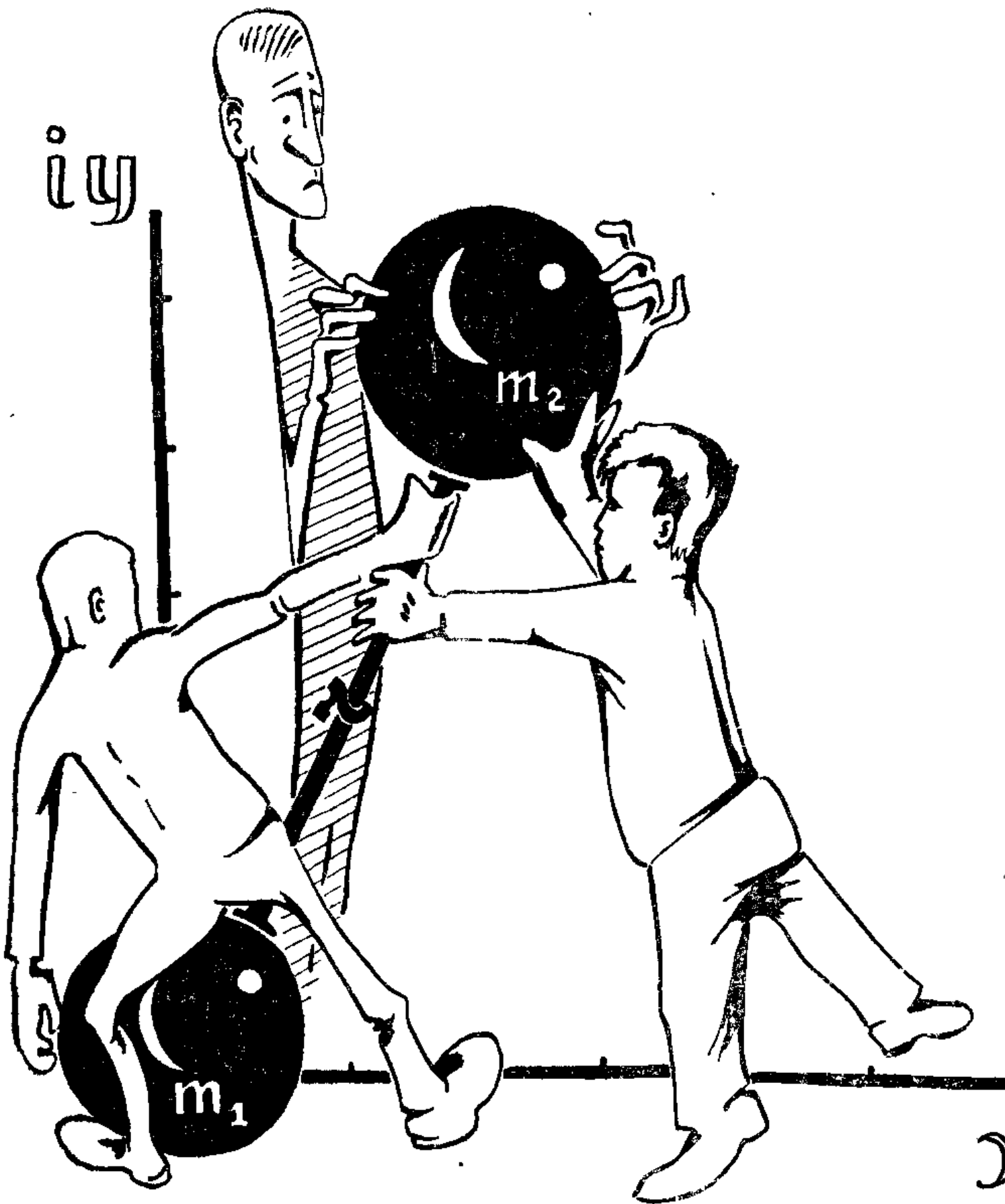
*А. А. Милн*

«Винни-Пух и все, все, все»

**1. От Эйлера до наших дней**

В первом очерке уже рассказывалось о движении спутника в поле тяготения земного сфероида. Мы видели, что хорошо разработанные аппараты уравнений в оскулирующих элементах и асимптотических методов нелинейной механики позволяют весьма просто установить основные возмущения в орбите спутника, вызванные сжатием Земли. Полученные формулы дают наглядную геометрическую картину движения спутника, выявляющую качественные и количественные закономерности движения. Но этого, конечно, недостаточно для точного расчета орбит. Точное решение задачи о движении спутника в поле тяготения, описываемом силовой функцией (1.7.1), невозможно в силу неинтегрируемости уравнений движения. Но если заняться глубже вопросом интегрируемости (что мы и намерены сделать), то выявляются удивительные вещи, замечательные с неожиданной точки зрения.

Обнаружилось, что эта задача в известном смысле эквивалентна старой классической проблеме движения точки в поле тяготения двух неподвижных притягивающих ньютоновских центров. Эта последняя проблема, как известно, была поставлена и сведена к квадратурам Леонардом Эйлером. С тех пор в течение двух столетий эта



задача занимала многих ученых, прельщенных как академической красотой ее, так и призрачным ее сходством со знаменитой «задачей трех тел», имеющей столь огромное значение для небесной механики и механики космического полета. Действительно, так называемая «ограниченная задача трех тел» рассматривает движение непритягивающей материальной точки в поле тяготения двух свободных ньютоновских центров (которые, стало быть, движутся относительно друг друга по кеплеровским законам). Решение ограниченной задачи трех тел позволило бы, например, непосредственно исследовать движение космического корабля от Земли к Луне. Задача о движении в поле двух неподвижных центров отличается от ограниченной задачи трех тел «всего лишь» тем, что притягивающие центры закреплены. Не удивительно, что имели место многочисленные попытки применить известное решение эйлеровой задачи к поиску неизвестного решения ограниченной задачи трех тел. Но эти попытки зримыми успехами не увенчались. «Задача двух неподвижных центров» не нашла конкретного применения в небесной механике, и наиболее интересные ее исследования носили до последнего времени абстрактно-математический характер.

Появление искусственных спутников стимулировало бурный прогресс механики и привело, в частности, к открытию глубокой и неожиданной аналогии между задачей двух центров и задачей о движении спутника в поле тяготения Земли. Таким образом, старая задача получила новое и очень важное конкретное приложение к теории движения искусственных спутников Земли. Первая публикация [2.1], устанавливающая эту аналогию, появилась в 1961 году и принадлежала троим соавторам — молодым (тогда) советским ученым Е. П. Аксенову, Е. А. Гребеникову, В. Г. Демину. В последующих публикациях они подробно исследовали движение спутника в поле тяготения Земли на основе открытой аналогии \*).

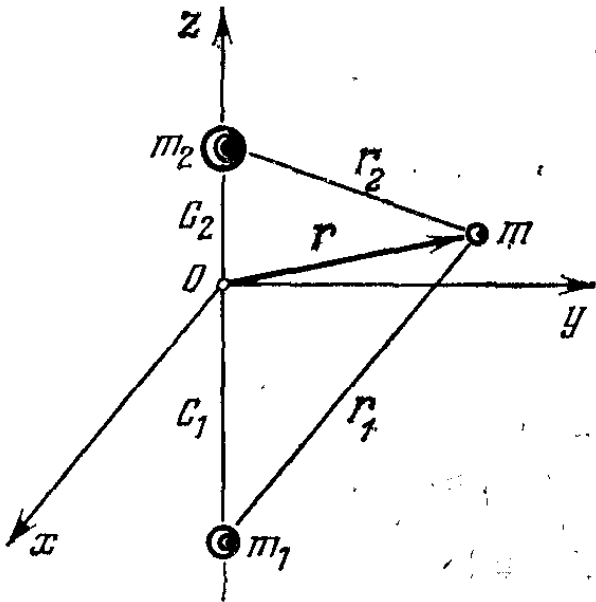
Перейдем к рассмотрению этой аналогии вплотную.

---

\*) В книге Д. Брауэра и Дж. Клеменса [2.2], изданной в 1961 году, также содержится краткое упоминание о такой аналогии двух задач. Подробное изложение рассматриваемых вопросов можно найти в монографии В. Г. Демина [2.3] и в книге Г. Н. Дубошина [2.4]. Идея замены задачи движения спутника в реальном гравитационном поле какой-то близкой интегрируемой задачей впервые, по-видимому, была предложена и осуществлена М. Д. Кисликом в 1958—1959 гг. [2.5]. В США аналогичный подход осуществлен в работах Дж. Винти [2.6].

## 2. Связь двух задач

Пусть в двух неподвижных центрах расположены материальные точки с массами  $m_1$  и  $m_2$  соответственно. Построим систему координат  $Oxyz$  так, чтобы ось  $Oz$  проходила через точки  $m_1$  и  $m_2$  (рис. 2.1). Расстояние от  $O$



до массы  $m_1$  обозначим  $c_1$ , а от  $O$  до  $m_2$  — через  $c_2$ . Пусть в суммарном поле сил ньютоновского притяжения к каждой из точек  $m_1, m_2$  находится точка с массой  $m$ , движение которой изучается. Ее движение определяется силовой функцией

$$U_{(2)} = f \left( \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right), \quad (2.2.1)$$

Рис. 2.1. К постановке задачи.

представляющей собой сумму силовых функций тяготения двух ньютоновских центров (на что и указывает индекс (2) в левой части формулы (2.2.1)). Здесь  $f$  — универсальная постоянная тяготения,  $r_1, r_2$  — расстояния от  $m_1, m_2$  соответственно до движущейся точки  $m$ :

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - c_1)^2}, \quad r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - c_2)^2}.$$

Рассмотрим для примера выражение  $\frac{1}{r_2}$ :

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2c_2z + c_2^2}} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{z}{r} \frac{c_2}{r} + \left(\frac{c_2}{r}\right)^2}}, \quad (2.2.2)$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  — расстояние движущейся точки от начала координат. Обозначив  $z/r = \sin \varphi$  ( $\varphi$  — широта движущейся точки, отсчитанная от плоскости  $Oxy$ ),  $\alpha = c_2/r$ , используем известное в теории полиномов Лежандра разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha \sin \varphi + \alpha^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(\sin \varphi). \quad (2.2.3)$$



Учитывая (2.2.2) и (2.2.3), можно написать

$$\frac{m_2}{r_2} = \frac{m_2}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{c_2}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi). \quad (2.2.4)$$

Здесь  $P_n$  — многочлен Лежандра  $n$ -го порядка.

Аналогично можно записать и выражение для  $m_1/r_1$ . Тогда силовая функция (2.2.1) задачи двух центров запишется в виде

$$U_{(2)} = \frac{f(m_1 + m_2)}{r} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{r^k} P_k(\sin \varphi) \right\}, \quad (2.2.5)$$

где  $\gamma_k$  определяется из равенства

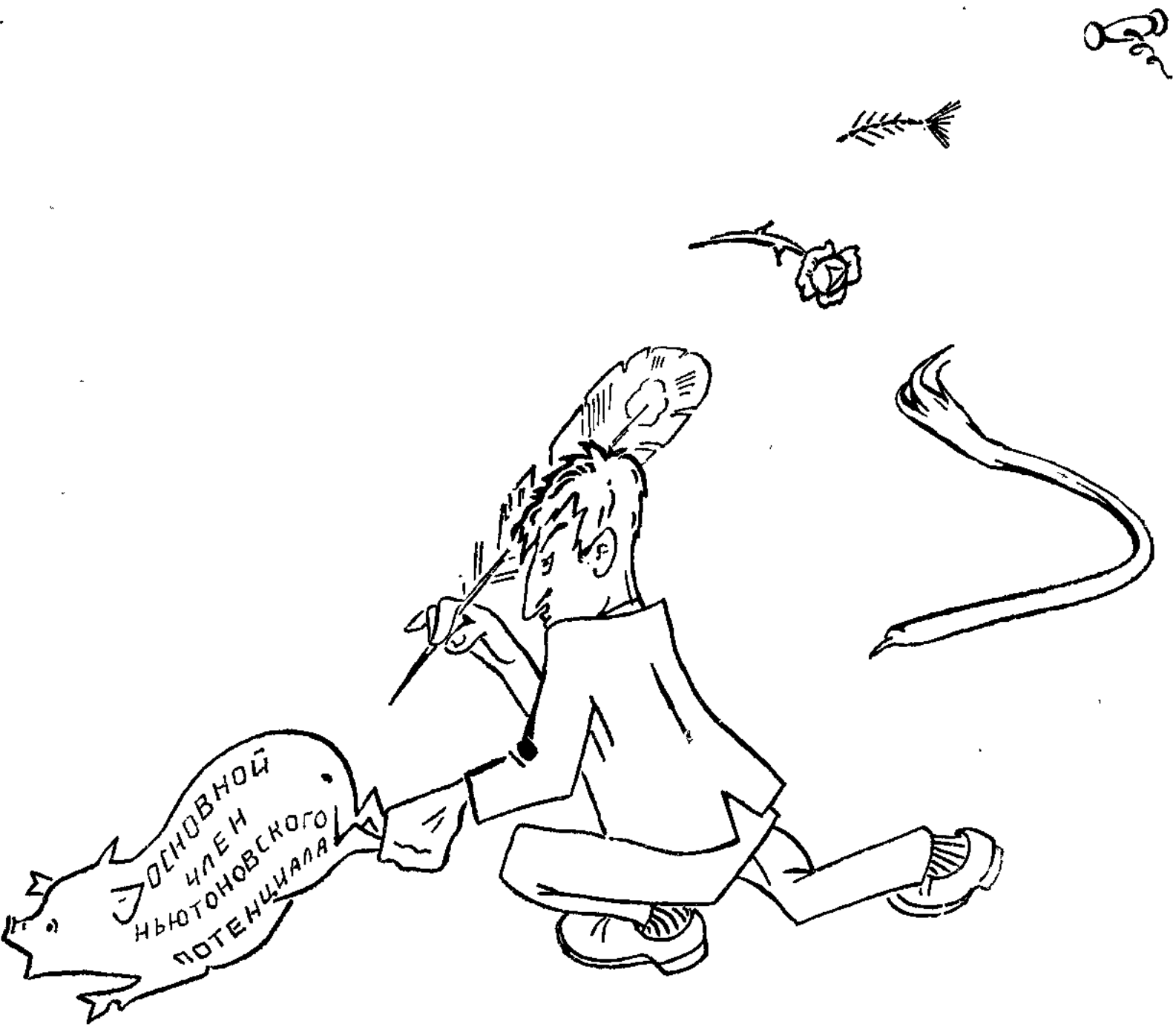
$$(m_1 + m_2) \gamma_k = m_1 c_1^k + m_2 c_2^k. \quad (2.2.6)$$

И тут невольно напрашивается сравнение силовой функции  $U_{(2)}$  (2.2.5) с уже известной нам силовой функцией  $U$  земного сфероиды (см. формулу (1.7.1)). Вид у обеих силовых функций почти тождествен; они были бы полностью одинаковыми, если бы равны были постоянные коэффициенты в соответствующих членах разложений; и так как задача с силовой функцией (2.2.5) интегрируема, то была бы интегрируема и задача о движении спутника. На самом деле это, конечно не так. Ведь разложение (2.2.5) содержит всего *четыре* свободных параметра:  $m_1, m_2, c_1, c_2$ , и, значит, можно отождествить лишь *четыре* члена разложения (1.7.1) с четырьмя членами разложения (2.2.5). Естественно такое отождествление провести для первых членов разложений, то есть потребовать, чтобы

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad m_1 + m_2 = M, \\ 2) \quad m_1 c_1 + m_2 c_2 = 0, \\ 3) \quad m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2 = MI_2 R^2, \\ 4) \quad m_1 c_1^3 + m_2 c_2^3 = MI_3 R^3. \end{array} \right\} \quad (2.2.7)$$

Более далекие члены разложений  $U$  и  $U_{(2)}$  при этом совпасть не могут, но это не столь важно, так как хорошо известны лишь первые из констант  $I_k$ , а другие  $I_k$  очень малы и их значения все равно известны плохо.

Таким образом, если выбрать параметры  $m_1, m_2, c_1, c_2$  задачи двух неподвижных центров так, чтобы выполнялись равенства (2.2.7), то силовая функция  $U_{(2)}$ , оставаясь силовой функцией этой задачи, вместе с тем в *главных*



своих членах будет совпадать с силовой функцией  $U$  поля тяготения Земли. Иначе говоря, если потенциал земного поля тяготения немного «испортить», переделав ему «хвостик» (заменяя весьма малые коэффициенты при членах разложения с индексами  $k \geq 4$  тоже весьма малыми, но другими коэффициентами), то задача о движении спутника в поле тяготения Земли (или какой-либо иной планеты) *становится интегрируемой*. При этом движение точки под действием такого «испорченного» потенциала будет весьма близко к движению под действием первоначального потенциала, так как действие главных членов потенциала учитывается точно. А в силу интегрируемости задачи получающиеся после интегрирования точные формулы должны отразить все эффекты влияния главных членов силовой функции поля тяготения Земли (а не только эволюционные эффекты, рассмотренные нами выше).

Итак, интегрируемая задача двух неподвижных центров с высокой точностью совпадает с задачей о движении точки в поле тяготения земного сфероида, если параметры задачи двух центров выбраны специальным образом, а именно удовлетворяющими уравнениям (2.2.7). Алгебраическая система (2.2.7) без труда разрешается. Из первых двух уравнений (2.2.7) получаем

$$m_1 = -\frac{Mc_2}{c_1 - c_2}, \quad m_2 = \frac{Mc_1}{c_1 - c_2}. \quad (2.2.8)$$

Подставляя (2.2.8) во вторые два уравнения (2.2.7), получим

$$\begin{aligned} c_1 c_2 &= -I_2 R^2, \\ c_1 c_2 (c_2 + c_1) &= -I_3 R^3, \end{aligned}$$

или

$$c_1 c_2 = -I_2 R^2, \quad c_2 + c_1 = \frac{I_3 R}{I_2}. \quad (2.2.9)$$

Отсюда видно, что  $c_1, c_2$  являются корнями следующего квадратного относительно  $c$  уравнения:

$$c^2 - \frac{I_3 R}{I_2} c - I_2 R^2 = 0. \quad (2.2.10)$$

Решая это уравнение, получим

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \left( \frac{I_3}{2I_2} + \sqrt{\left( \frac{I_3}{I_2} \right)^2 + 4I_2} \right) \frac{R}{2}, \\ c_2 &= \left( \frac{I_3}{2I_2} - \sqrt{\left( \frac{I_3}{I_2} \right)^2 + 4I_2} \right) \frac{R}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.11)$$

Подставляя теперь (2.2.11) в (2.2.8), полностью определим параметры  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ . Вспоминая численные значения величин  $I_2$ ,  $I_3$  ( $I_2 \sim -10^{-3}$ ,  $I_3 \sim 10^{-5}$ ), обнаружим удивительное обстоятельство: расстояния  $c_1$  и  $c_2$  и массы  $m_1$  и  $m_2$  необходимой нам задачи двух центров оказываются комплексными! Тем самым мы получили обобщение классической задачи на комплексные массы и расстояния. Пугаться этого не следует — ведь силовая функция остается действительной, а вместе с ней — и движение.

Коэффициент  $I_2$  характеризует сжатие Земли, а  $I_3$  — ее асимметрию относительно плоскости экватора. Эта асимметрия весьма мала ( $|I_3/I_2| \sim 10^{-2}$ ), и ею можно пренебречь. Если учитывать только сжатие Земли, положив  $I_3 = 0$ , то получим

$$m_1 = m_2 = \frac{M}{2}, \quad c_1 = iR \sqrt{|I_2|}, \quad c_2 = -iR \sqrt{|I_2|}. \quad (2.2.12)$$

Итак, движение спутника в поле тяготения сжатой, симметричной относительно экватора Земли можно интерпретировать задачей (интегрируемой) о движении точки в поле двух неподвижных центров, имеющих одинаковые массы и расположенных на чисто мнимом (!) расстоянии друг от друга. (Расстояние было бы действительным для вытянутой, а не сжатой Земли.) Найденная Аксеновым, Гребениковым и Дёминым аналогия двух задач позволила рассмотреть движение спутника в поле тяготения Земли в замкнутом виде — в эллиптических функциях (см. ниже). Надо сказать, что классическая задача рассматривалась в основном в плоском случае, а траектории спутника — существенно пространственные, что само по себе стимулировало дальнейшее исследование проблемы двух неподвижных центров.

Важно отметить, что открытие аналогии двух задач далось не сразу. К нему исподволь подбирались в течение нескольких лет ученые разных стран. Дж. Винти [2.6] в США, М. Д. Кислик [2.5] в СССР и другие ученые приводили задачу о движении спутника в земном поле тяготения к интегрируемому виду с помощью так или иначе «подпорченного» потенциала. Но только рассмотрение проблемы Аксеновым, Гребениковым, Деминым в указанном выше виде внесло полную ясность в постановку, место и характер задачи. Ранее рассмотренные случаи получаются отсюда как частные. Сейчас задачу с двумя

неподвижными центрами, расположенными на некоем комплексном расстоянии друг от друга и обладающими комплексными массами, называют *обобщенной задачей двух неподвижных центров*. В таком виде задача продолжает привлекать внимание исследователей (В. М. Алексеев [2.7] и др.).

### 3. Интегрирование. Система координат

Теперь можно приступить к интегрированию задачи. Будем рассматривать случай (2.2.12). Введем обозначение  $c = R \sqrt{|I_2|}$ ; тогда

$$U_{(2)} = f \frac{M}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + ic)^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - ic)^2}} \right\}. \quad (2.3.1)$$

Не всякая система координат хороша для интегрирования задач. Обычно каждая конкретная задача требует разумного выбора системы переменных, в которых анализ проходит наиболее удобным образом; выбор такой системы переменных не всегда прост; над этим стоит поломать голову, так как это предопределяет успех (или неудачу) исследования. В нашей задаче вместо декартовых координат  $x, y, z$  введем криволинейную систему координат  $\lambda, \mu, w$  так, что

$$\left. \begin{aligned} x &= c \sqrt{(1 + \lambda^2)(1 - \mu^2)} \cos w, \\ y &= c \sqrt{(1 + \lambda^2)(1 - \mu^2)} \sin w, \\ z &= c\lambda\mu. \end{aligned} \right\} \quad (2.3.2)$$

Разберем смысл новых переменных. Из (2.3.2) можно получить

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2 + y^2}{c^2(1 + \lambda^2)} + \frac{z^2}{c^2\lambda^2} &= 1, \\ \frac{x^2 + y^2}{c^2(1 - \mu^2)} - \frac{z^2}{c^2\mu^2} &= 1, \\ \frac{x}{y} &= \operatorname{tg} w. \end{aligned} \right\} \quad (2.3.3)$$

Отсюда видно, что геометрическое место точек  $\lambda = \text{const}$  ( $0 \leq \lambda < +\infty$ ) есть сжатый эллипсоид вращения с осью симметрии, направленной по оси  $z$  старой системы координат. Малая полуось эллипсоида имеет величину  $c\lambda$ , большая полуось — величину  $c\sqrt{1 + \lambda^2}$  (рис. 2.2). Геометрическое место точек  $\mu = \text{const}$  есть однополостный

гиперболоид вращения (с той же осью симметрии  $z$ ). (При этом гиперболоиды заполняют все пространство при

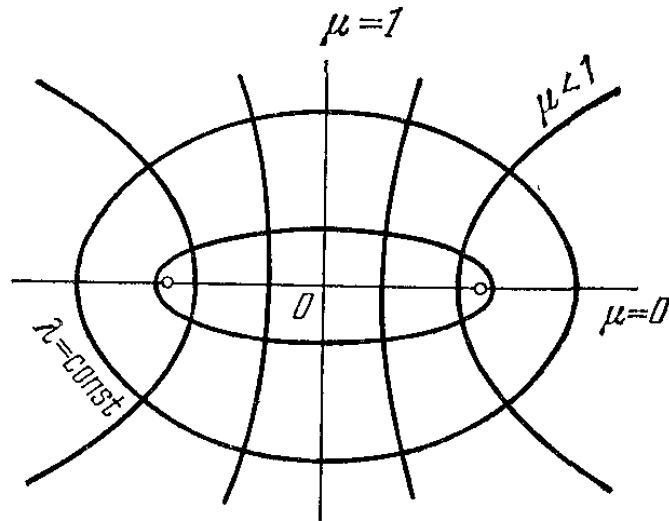


Рис. 2.2. Эллиптическая система координат.

прохождении  $\mu^2$  от 0 до 1). Наконец,  $w = \text{const}$  ( $-\infty < w < +\infty$ ) — плоскость, содержащая ось  $z$  (меридиональная плоскость). В этих переменных  $r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + ic)^2} = c(\lambda + i\mu)$ ,  $r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - ic)^2} = c(\lambda - i\mu)$ , а поэтому

$$U_{(2)} = fM \frac{\lambda}{c(\lambda^2 + \mu^2)}. \quad (2.3.4)$$

Так как  $U_{(2)} > 0$  всегда, то область определения  $\lambda$ :  $0 < \lambda < \infty$ .

Выписывая в силу (2.3.2) выражения производных по времени  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$  через производные  $\dot{\lambda}$ ,  $\dot{\mu}$ ,  $\dot{w}$ , можно получить выражение кинетической энергии  $T = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

через  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $w$ ,  $\dot{\lambda}$ ,  $\dot{\mu}$ ,  $\dot{w}$ . Оказывается тогда, что

$$T = \frac{c^2}{2} \left\{ \frac{\lambda^2 + \mu^2}{1 + \lambda^2} \dot{\lambda}^2 + \frac{\lambda^2 + \mu^2}{1 - \mu^2} \dot{\mu}^2 + (1 + \lambda^2)(1 - \mu^2) \dot{w}^2 \right\}. \quad (2.3.5)$$

Полная энергия движения будет

$$H = T - U_{(2)}. \quad (2.3.6)$$

#### 4. Метод Гамильтона — Якоби

Здесь и в дальнейшем нам понадобится метод Якоби интегрирования уравнений динамики. Изложим его без вывода и в том простейшем виде, в каком он будет употребляться в этой книге, отсылая за подробностями к любо-

му курсу аналитической или небесной механики (см., например, [2.8, 2.9]).

Пусть кинетическая энергия зависит от обобщенных (криволинейных) координат  $q_1, q_2, q_3$  и соответствующих скоростей  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$ :

$$T = T(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3). \quad (2.4.1)$$

Тогда частные производные

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}, \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}, \quad p_3 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} \quad (2.4.2)$$

называются *обобщенными импульсами*. Выразим из формул (2.4.2) скорости  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$  через обобщенные импульсы  $p_1, p_2, p_3$  (предполагая, что это возможно) и подставим их в выражение (2.4.1) кинетической энергии. Получим ее преобразованное выражение

$$\tilde{T} = T(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3).$$

Пусть  $U(q_1, q_2, q_3)$  — силовая функция поля сил, в котором происходит движение.  $U$  не зависит явно от времени. Тогда полная энергия движения

$$H = \tilde{T} - U$$

будет постоянна:

$$H(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) = h. \quad (2.4.3)$$

Функция  $H(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$  называется *функцией Гамильтона*.

Уравнения движения в этом случае имеют следующий *канонический вид*:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2.4.4)$$

и называются *уравнениями Гамильтона*.

Составим уравнение в частных производных, заменив в (2.4.3)  $p_1, p_2, p_3$  на  $\frac{\partial W}{\partial p_1}, \frac{\partial W}{\partial p_2}, \frac{\partial W}{\partial p_3}$ :

$$H\left(q_1, q_2, q_3, \frac{\partial W}{\partial p_1}, \frac{\partial W}{\partial p_2}, \frac{\partial W}{\partial p_3}\right) = h. \quad (2.4.5)$$

Это уравнение называется *уравнением Гамильтона — Якоби*. Функция  $W$  в этом уравнении подлежит определению. А именно, нужно найти такое решение уравнения (2.4.5) Гамильтона — Якоби

$$W(h, \alpha_2, \alpha_3, q_1, q_2, q_3),$$

чтобы оно зависело от трех постоянных: от  $h$  и еще двух произвольных постоянных  $\alpha_2, \alpha_3$ . Если такую функцию  $W$  удалось найти, то общий интеграл системы (2.4.4) канонических уравнений движения записывается в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial h} &= t + \beta_1, & \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} &= \beta_2, & \frac{\partial W}{\partial \alpha_3} &= \beta_3, \\ \frac{\partial W}{\partial q_1} &= p_1, & \frac{\partial W}{\partial q_2} &= p_2, & \frac{\partial W}{\partial q_3} &= p_3. \end{aligned} \right\} \quad (2.4.6)$$

Здесь  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  — новые произвольные постоянные. Формулы (2.4.6) дают связь координат  $q_1, q_2, q_3$  и импульсов  $p_1, p_2, p_3$  со временем  $t$  и шестью произвольными постоянными  $h, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ . Следовательно, эти формулы полностью решают динамическую задачу. (Для завершения исследования нужно из системы уравнений (2.4.6) получить явные зависимости координат и импульсов от времени и произвольных постоянных. Это обычно нелегкая работа.)

## 5. Интегрирование

Итак, следуя методу Гамильтона — Якоби, выпишем обобщенные импульсы для нашей задачи:

$$\left. \begin{aligned} p_\lambda &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}} = c^2 \frac{\lambda^2 + \mu^2}{1 + \lambda^2} \dot{\lambda}, \\ p_\mu &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\mu}} = c^2 \frac{\lambda^2 + \mu^2}{1 - \mu^2} \dot{\mu}, \\ p_w &= \frac{\partial T}{\partial \dot{w}} = c^2 (1 + \lambda^2) (1 - \mu^2) \dot{w}. \end{aligned} \right\} \quad (2.5.1)$$

Выражая отсюда скорости через импульсы и подставляя в выражение (2.3.5) для  $T$ , получим преобразованную кинетическую энергию в виде

$$\tilde{T} = \frac{1}{2c^2} \left\{ \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^2 + \mu^2} p_\lambda^2 + \frac{1 - \mu^2}{\lambda^2 + \mu^2} p_\mu^2 + \frac{p_w^2}{(1 + \lambda^2)(1 - \mu^2)} \right\} \quad (2.5.2)$$

и функцию Гамильтона в виде

$$H = \tilde{T} - U, \quad (2.5.3)$$

где  $U(\mu, \lambda)$  дается формулой (2.3.4). Теперь можно сразу составить уравнение Гамильтона — Якоби, принимающее



после умножения на  $2c^2 (\lambda^2 + \mu^2)$  вид

$$(1 + \lambda^2) \left( \frac{\partial W}{\partial \lambda} \right)^2 + (1 - \mu^2) \left( \frac{\partial W}{\partial \mu} \right)^2 + \left( \frac{1}{1 - \mu^2} - \frac{1}{1 + \lambda^2} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial w} \right)^2 = 2fMc\lambda + 2hc^2 (\lambda^2 + \mu^2). \quad (2.5.4)$$

Будем искать нужное нам решение этого уравнения в виде

$$W = W_1(\lambda) + W_2(\mu) + W_3(w) \quad (2.5.5)$$

и положим

$$\frac{dW_3}{dw} = \alpha_3 = \text{const} \quad (W_3 = \alpha_3 w). \quad (2.5.6)$$

Тогда уравнение (2.5.4) Гамильтона — Якоби будет удовлетворено, если

$$(1 + \lambda^2) \left( \frac{dW_1}{d\lambda} \right)^2 = \frac{1}{1 + \lambda^2} \alpha_3^2 + 2fMc\lambda + 2hc^2\lambda^2 + 2\alpha_2, \quad (2.5.7)$$

$$(1 - \mu^2) \left( \frac{dW_2}{d\mu} \right)^2 = -\frac{1}{1 - \mu^2} \alpha_3^2 + 2hc^2\mu^2 - 2\alpha_2, \quad (2.5.8)$$

где  $\alpha_2$  — новая постоянная. Из этих выражений  $W_1(\lambda)$  и  $W_2(\mu)$  легко вычисляются квадратурами; тем самым определяется и  $W$ , имеющая вид

$$W = \int \frac{\sqrt{L(\lambda)}}{1 + \lambda^2} d\lambda + \int \frac{\sqrt{M(\mu)}}{1 - \mu^2} d\mu + \alpha_3 w, \quad (2.5.9)$$

где

$$\left. \begin{aligned} L(\lambda) &= \alpha_3^2 + 2(1 + \lambda^2)(hc^2\lambda^2 + fMc\lambda + \alpha_2), \\ M(\mu) &= -\alpha_3^2 + 2(1 - \mu^2)(hc^2\mu^2 - \alpha_2). \end{aligned} \right\} \quad (2.5.10)$$

Теперь можно завершить сведение задачи к квадратурам, обращаясь к формулам (2.4.6). Однако получающиеся после этого уравнения непосредственно необратимы (то есть невозможно их разрешить относительно координат). Поэтому несколько отойдем от традиционного метода Гамильтона — Якоби. А именно воспользуемся одновременно соотношениями (2.4.6) и (2.5.1) для импульсов; получим

$$\left. \begin{aligned} p_\lambda &= \frac{\partial W}{\partial \lambda} = \frac{\sqrt{L}}{1 + \lambda^2} = c^2 \frac{\lambda^2 + \mu^2}{1 + \lambda^2} \dot{\lambda}, \\ p_\mu &= \frac{\partial W}{\partial \mu} = \frac{\sqrt{M}}{1 - \mu^2} = c^2 \frac{\lambda^2 + \mu^2}{1 - \mu^2} \dot{\mu}, \\ p_w &= \frac{\partial W}{\partial w} = \alpha_3 = c^2 (1 + \lambda^2)(1 - \mu^2) \dot{w}. \end{aligned} \right\} \quad (2.5.11)$$

Введем теперь новую независимую переменную  $\tau$ , связанную со старой  $t$  соотношением

$$dt = c^2 (\lambda^2 + \mu^2) d\tau; \quad (2.5.12)$$

тогда только что написанные уравнения дают

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\lambda}{d\tau} &= \sqrt{L(\lambda)}, \\ \frac{d\mu}{d\tau} &= \sqrt{M(\mu)}, \\ \frac{dw}{d\tau} &= \alpha_3 \frac{\lambda^2 + \mu^2}{(1 + \lambda^2)(1 - \mu^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (2.5.13)$$

Первые два уравнения немедленно приводят к квадратурам:

$$\int \frac{d\lambda}{\sqrt{L(\lambda)}} = \tau + \beta_\lambda, \quad \int \frac{d\mu}{\sqrt{M(\mu)}} = \tau + \beta_\mu, \quad (2.5.14)$$

где  $\beta_\lambda, \beta_\mu$  — новые произвольные постоянные. Если эти квадратуры удастся обратить, то есть получить явные выражения  $\lambda(\tau), \mu(\tau)$ , то правая часть третьего из уравнений (2.5.13) будет являться явной функцией от  $\tau$ , и тогда

$$w = \alpha_3 \int \frac{\lambda^2 + \mu^2}{(1 + \lambda^2)(1 - \mu^2)} d\tau + \beta_w, \quad (2.5.15)$$

что вместе с  $\mu(\tau)$  и  $\lambda(\tau)$  дает параметрическое (параметр  $\tau$ ) уравнение траекторий ( $\beta_w$  — последняя произвольная постоянная). Наконец, из (2.5.12) получим и явную зависимость времени  $t$  от этого же параметра:

$$t = c^2 \int (\lambda^2 + \mu^2) d\tau, \quad (2.5.16)$$

и задача будет полностью разрешена.

## 6. Область движения спутника

Итак, дело требует прежде всего обращения квадратур (2.5.14). Это не очень простая задача. Так как подрадикальные полиномы имеют четвертый порядок, то обращение может быть проведено в эллиптических функциях Якоби, но, в зависимости от значений корней полиномов каждый раз по-разному. Имеются трудности также и с вычислением корней полиномов четвертого порядка

через коэффициенты полиномов, хотя при качественном анализе траекторий этого вычисления можно избежать.

Из определения криволинейной системы координат следует, что переменные определены в области

$$\left. \begin{aligned} -\infty < w < +\infty, \\ 0 \leq \lambda < +\infty \\ -1 \leq \mu \leq +1, \end{aligned} \right\} \quad (2.6.1)$$

и поэтому при анализе движения во внимание нужно принимать лишь те значения  $\lambda, \mu, w$ , которые попадают в область (2.6.1) определения движения. Учитывая это, рассмотрим качественно типичную «спутниковую» ситуацию.

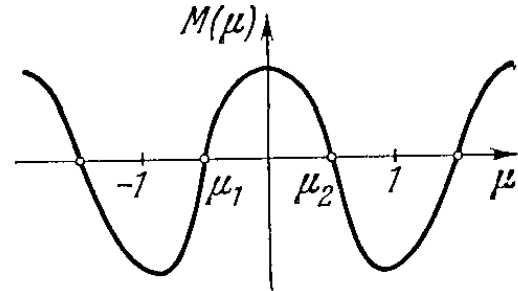


Рис. 2.3. Полином  $M(\mu)$ .

Пусть значение постоянной энергии  $h < 0$ . Тогда  $M(\mu) \rightarrow +\infty$  при  $\mu \rightarrow \pm\infty$  и  $M(\mu) < 0$  при  $\mu = \pm 1$  (что легко видеть из формулы (2.5.10) для полинома  $M(\mu)$ ). Так как в действительном движении обязательно должно быть  $M(\mu) > 0$ , как и  $L(\lambda) > 0$  (иначе получаются мнимые значения для координат и скоростей), то на интервале  $-1 < \mu < +1$  определения  $\mu$  должно быть два действительных корня  $\mu_1, \mu_2$ . Полином  $M(\mu)$  биквадратный, поэтому всякому положительному корню сопутствует такой же по модулю отрицательный. В результате  $M(\mu)$  имеет вид, указанный на рис. 2.3.

В реальном движении  $-1 \leq \mu_1 \leq \mu \leq \mu_2 \leq 1$ ,  $\mu_1 = -\mu_2$ , значения  $\mu = \mu_1$  и  $\mu = \mu_2$  отвечают одному и тому же гиперболоиду; отрицательное значение  $\mu$  соответствует движению в области  $z < 0$  (южном полушарии), положительное — в области  $z > 0$  (северном полушарии). Таким образом, в рассматриваемом движении  $\mu^2 \leq \mu_1^2 = \mu_2^2$ , что соответствует движению «вне» гиперболоида  $\mu^2 = \mu_1^2 = \mu_2^2$ .

Обратимся теперь к полиному  $L(\lambda)$  (2.5.10). Распишем его подробно:

$$L(\lambda) = 2hc^2\lambda^4 + 2fM\epsilon\lambda^3 + (2hc^2 + 2\alpha_2)\lambda^2 + 2fM\epsilon\lambda + \alpha_3^2 + 2\alpha_2.$$

При том же условии  $h < 0$ ,  $L \rightarrow -\infty$  при  $\lambda \rightarrow \pm\infty$ : Далее, из анализа полинома  $M(\mu)$  ясно, что  $M(0) = -\alpha_3^2 - 2\alpha_2 > 0$ , откуда  $\alpha_3^2 + 2\alpha_2 < 0$  и тем более

$\alpha_2 < 0$ . Но тогда в полиноме  $L(\lambda)$  все коэффициенты при четных степенях  $\lambda$  отрицательны (в том числе и свободный член), а коэффициенты при нечетных степенях  $\lambda$  положительны. Значит, при  $\lambda \leq 0$   $L(\lambda) < 0$ . Все действительные корни лежат на полуоси  $\lambda > 0$ . Этих (действительных) корней либо два, либо четыре. По теореме

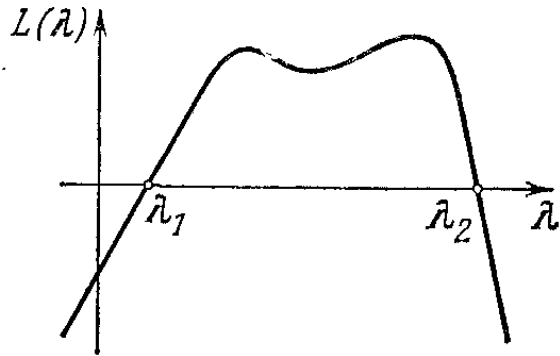


Рис. 2.4. Полином  $L(\lambda)$  (случай двух действительных корней).

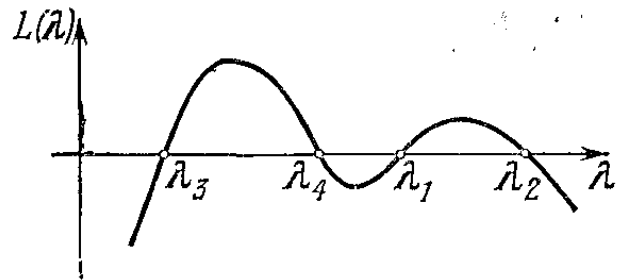


Рис. 2.5. Полином  $L(\lambda)$  (случай четырех действительных корней).

Вьета произведение всех четырех корней равно свободному члену, деленному на коэффициент при старшем члене:

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 = \frac{(\alpha_3^2 + 2\alpha_2)}{2hc^2} > 0,$$

и, стало быть, действительных положительных корней может быть два или четыре. Если действительных корней два (пусть  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ ), то полином  $L(\lambda)$  имеет вид, изображенный на рис. 2.4. Итак, в действительном движении  $L(\lambda) > 0$ , что возможно лишь при  $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$ , то есть движение заключено между двумя эллипсоидами  $\lambda = \lambda_1$  и  $\lambda = \lambda_2$ . Если действительных корней четыре (рис. 2.5), то  $\lambda$  во все время движения все равно заключено между двумя значениями корней (пусть между  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ ). Подведем итог.

При единственном условии  $h < 0$  движение всегда происходит вне гиперboloида  $\mu^2 = \mu_*^2$  ( $-\mu_* \leq \mu \leq \mu_*$ ) и внутри полости, заключенной между двумя эллипсоидами  $\lambda = \lambda_1$  и  $\lambda = \lambda_2$  ( $0 < \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$ ), так что движение происходит в эллипсоидальном кольце, изображенном на рис. 2.6.

Этот результат можно лучше прочувствовать, используя полученную ранее приближенную (эволюционную) картину движения. Вспомним, что в плоскости орбиты оскулирующий эллипс медленно прецессирует, не меняя

своей формы, так что расстояние спутника от центра Земли никогда не меньше  $r_\pi$  и не больше  $r_\alpha$ . Но сама плоскость орбиты медленно прецессирует вокруг оси Земли, так что кольцо  $r = r_\pi$  замечает пояс на сфере радиуса  $r = r_\pi$ , угловая ширина пояса равна  $2i$  (где  $i$  — угол наклона орбиты к экватору). Аналогично, кольцо

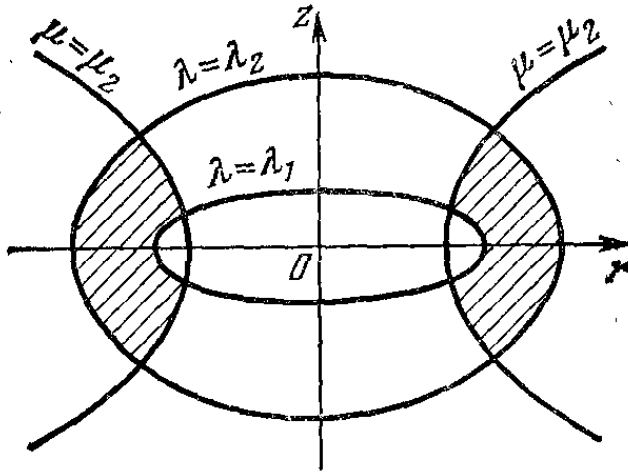


Рис. 2.6. Область движения спутника.

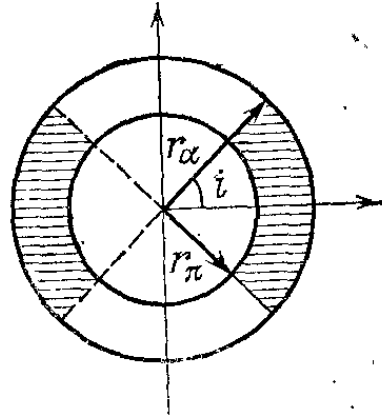


Рис. 2.7. Область движения спутника в эволюционном движении.

$r = r_\alpha$  замечает на сфере радиуса  $r = r_\alpha$  пояс той же угловой ширины. В результате эволюционное движение происходит в сфероидальном кольце, изображенном на рисунке 2.7.

Это кольцо очень похоже на описанное выше эллипсоидальное кольцо точной области определения движения, но все же отличается от него. Отличие это чрезвычайно мало. В самом деле, эксцентриситет внутреннего, например, эллипсоида  $\varepsilon_1 = \frac{1}{1 + \lambda_1^2}$ . Но из (2.3.2) можно получить  $r_0^2 = c^2 (1 + \lambda^2)$ , где  $r_0$  — расстояние спутника до центра Земли в момент прохождения спутником экваториальной плоскости. Поэтому

$$\varepsilon_1 \sim \frac{c^2}{r_0^2} = \left( \frac{R^2}{r_0^2} \right) |I_2| < |I_2| \sim 10^{-3}.$$

Следовательно, эллипсоидальное кольцо мало отличается от сфероидального.

При подробном разборе возможных случаев ограниченного движения ( $h < 0$ ) выявляются не только спутниковые траектории, лежащие целиком вне поверхности Земли, но и баллистические траектории, лишь частично

лежащие над поверхностью Земли (для таких траекторий внутренний граничный эллипсоид  $\lambda = \lambda_1$  лежит под поверхностью Земли). Может оказаться, что траектория *целиком* лежит на одном эллипсоиде (а не в пространстве между двумя эллипсоидами); это соответствует наличию кратных корней в полиноме  $L(\lambda)$  (например,  $\lambda_1 = \lambda_2$ ).

Отсылая за подробностями к первоисточнику [2.1], разберем лишь частный случай. Он поможет нам понять, как анализ интегрируемых задач доводится до «почти» последнего этапа — явных формул, дающих, например, в рассматриваемой задаче зависимости  $\lambda(\tau)$ ,  $\mu(\tau)$ . Если такие явные формулы есть, то они позволяют провести подробный анализ свойств траекторий и (вот он, «последний этап») довести этот анализ до числовых результатов.

Для этих целей нам понадобятся сведения об эллиптических функциях Якоби.

## 7. Эллиптические функции Якоби

Любой интеграл типа  $\int \frac{dx}{\sqrt{G(x)}}$ , где  $G(x)$  — полином третьего или четвертого порядка, может быть приведен к интегралу следующего вида:

$$F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} = \bar{F}(k, z). \quad (2.7.1)$$

Этот интеграл называется *нормальным эллиптическим интегралом Лежандра первого рода*; при этом  $0 \leq k \leq 1$ ; число  $k$  называется *модулем эллиптического интеграла*. Определенный интеграл

$$K(k) = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.7.2)$$

называется *полным интегралом первого рода*. Интеграл  $K(k)$  — монотонно возрастающая функция своего аргумента, причем  $K(0) = \pi/2$ ,  $K(1) = \infty$ . Функция  $K(k)$  затабулирована; при небольших значениях  $k$  удобно пользоваться разложением

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots + \left[\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\right]^2 k^{2n} + \dots \right\}. \quad (2.7.3)$$

Здесь двойной факториал, как обычно, означает произведение всех нечетных (четных) чисел от единицы до  $2n - 1$  (до  $2n$ ) включительно.

Обозначим

$$u = F(k, \varphi). \quad (2.7.4)$$

Зависимость  $u$  от  $\varphi$  при некоторых значениях  $k$  указана на рис. 2.8. Задача обращения эллиптического интеграла

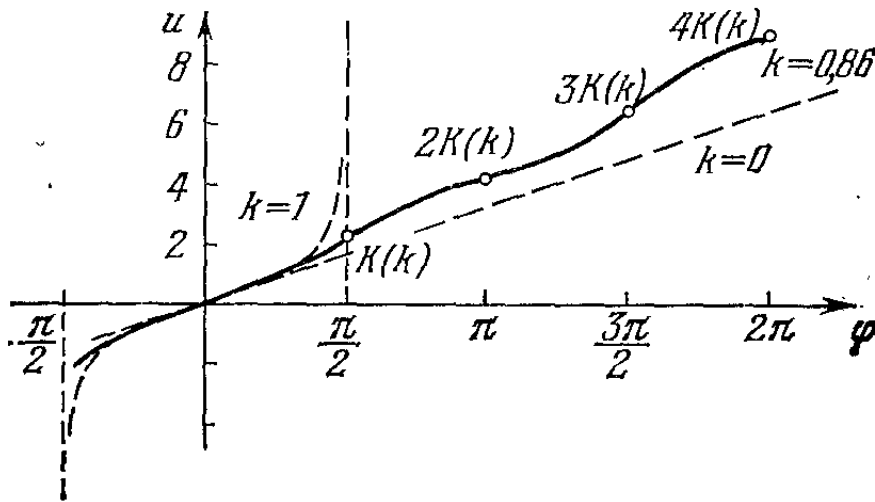


Рис. 2.8. График функции  $u(\varphi)$ .

$F(k, \varphi)$  означает рассмотрение обратной зависимости  $\varphi$  от  $u$  вместо известной зависимости  $u$  от  $\varphi$ . Величина  $\varphi$ , задаваемая как функция от  $u$  и  $k$  соотношением (2.7.4), называется *амплитудой*  $u$  и обозначается

$$\varphi = \text{am } u. \quad (2.7.5)$$

*Эллиптическим синусом* ( $\text{sn } u$ ) называется синус амплитуды, то есть

$$\text{sn } u = \sin(\text{am } u). \quad (2.7.6)$$

Аналогично определяется *эллиптический косинус*:

$$\text{cn } u = \cos(\text{am } u). \quad (2.7.7)$$

Кроме того, вводится функция

$$\text{dn } u = \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2 u}, \quad (2.7.8)$$

называемая *дельтой амплитуды*. Функции  $\text{sn } u$ ,  $\text{cn } u$ ,  $\text{dn } u$  носят название *эллиптических функций Якоби*.

Ряд задач механики, начиная с задачи о движении маятника, решается в этих функциях. Задачи динамики

космического полета, рассматриваемые в этом и следующем очерках, тоже приводят к эллиптическим функциям Якоби. Свойства эллиптических синуса и косинуса отчасти напоминают свойства тригонометрических синуса и косинуса. Надо, однако, помнить, что эллиптическая функция есть функция двух аргументов  $u, k$ . Обозначение аргумента  $k$  обычно опускается, но функции от него зависят! Функции  $\operatorname{sn} u$  и  $\operatorname{cn} u$  периодические с периодом  $4K(k)$ , функция  $\operatorname{dn} u$  — периодическая с периодом  $2K(k)$ ;  $\operatorname{sn} u$  и  $\operatorname{cn} u$  принимают значения на отрезке  $[-1, +1]$ ,  $\operatorname{dn} u$  — на отрезке  $[\sqrt{1-k^2}, +1]$ .

В следующей табличке приведены некоторые значения эллиптических функций.

$u \backslash$	0	$K$	$2K$	$3K$	$4K$
$\operatorname{sn} u$	0	1	0	-1	0
$\operatorname{cn} u$	1	0	-1	0	1
$\operatorname{dn} u$	1	$\sqrt{1-k^2}$	1	$\sqrt{1-k^2}$	1

На рис. 2.9 изображены графики функций  $\operatorname{sn} u$ ,  $\operatorname{cn} u$ ,  $\operatorname{dn} u$  для некоторых значений  $k$ . Величина  $K(k)$  играет

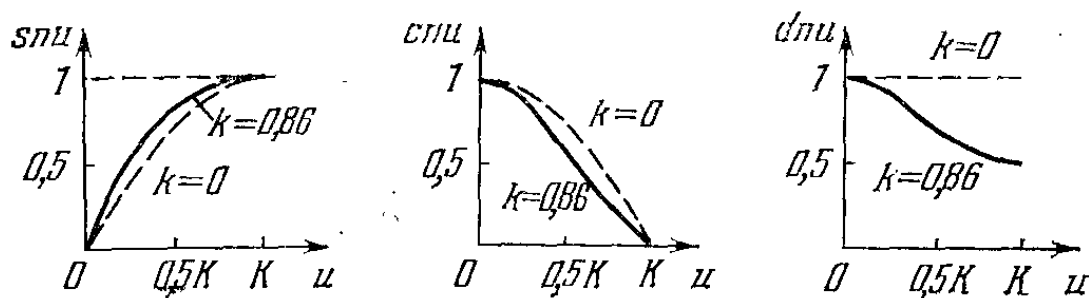


Рис. 2.9. Графики функций  $\operatorname{sn} u$ ,  $\operatorname{cn} u$ ,  $\operatorname{dn} u$ .

ту же роль для эллиптических функций, что и величина  $\pi/2$  для тригонометрических. Однако, как уже говорилось,  $K$  может принять любые числовые значения на интервале  $\pi/2 \leq K < \infty$  в зависимости от значения модуля  $k$ .



Поэтому период эллиптических синуса и косинуса может принять любое значение от  $2\pi$  до  $\infty$ . При  $k = 0$  эллиптические функции вырождаются в тригонометрические с периодом  $2\pi$ :

$$k = 0, \quad \operatorname{sn} u = \sin u, \quad \operatorname{cn} u = \cos u, \quad \operatorname{dn} u = 1.$$

При  $k = 1$  эллиптические функции выражаются через неперiodические, а именно гиперболические функции:

$$k = 1, \quad \operatorname{sn} u = \operatorname{th} u, \quad \operatorname{cn} u = (\operatorname{ch} u)^{-1}, \quad \operatorname{dn} u = (\operatorname{ch} u)^{-1}.$$

Полезно отметить следующие свойства эллиптических функций Якоби:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sn}(-u) &= -\operatorname{sn} u, & \operatorname{cn}(-u) &= \operatorname{cn} u, & \operatorname{dn}(-u) &= \operatorname{dn} u, \\ \operatorname{sn}(2K - u) &= \operatorname{sn} u, & \operatorname{cn}(2K - u) &= -\operatorname{cn} u, \\ \operatorname{dn}(2K - u) &= \operatorname{dn} u, & \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u &= 1, \\ \operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u &= 1, & \operatorname{dn}^2 u - k^2 \operatorname{cn}^2 u &= 1 - k^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.7.9)$$

Формулы дифференцирования:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{du} \operatorname{sn} u &= \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \\ \frac{d}{du} \operatorname{cn} u &= -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, \\ \frac{d}{du} \operatorname{dn} u &= -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u. \end{aligned} \right\} \quad (2.7.10)$$

Теперь мы можем изучить один интересный частный случай.

## 8. Движение полярного спутника Земли

Рассмотрим формулы (2.5.13) и (2.5.10). Если  $\alpha_3 = 0$ , то  $\frac{dw}{d\tau} = 0$ ,  $w = w_0$ , то есть движение происходит в неподвижной меридиональной плоскости. При этом

$$L(\lambda) = -2|h|c^2(1 + \lambda^2) \left[ \lambda^2 - \frac{fM}{|h|c} \lambda + \frac{1}{c^2} \left| \frac{\alpha_2}{h} \right| \right], \quad (2.8.1)$$

$$M(\mu) = -2|h|c^2(1 - \mu^2) \left( \mu^2 - \frac{1}{c^2} \left| \frac{\alpha_2}{h} \right| \right). \quad (2.8.2)$$

Имеем из (2.5.14)

$$\tau + \beta_\mu = \int_0^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{M(\mu)}} = \int_0^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{2|\alpha_2|(1 - \mu^2) \left( 1 - c^2 \left| \frac{h}{\alpha_2} \right| \mu^2 \right)}}.$$

Обозначив  $u = \sqrt{2|\alpha_2|} (\tau + \beta_\mu)$  и  $c^2 \left| \frac{h}{\alpha_2} \right| = k_\mu^2$ , получим

$$u = \int_0^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{(1-\mu^2)(1-k_\mu^2\mu^2)}}.$$

Анализируя полином  $M(\mu)$  в общем виде, можно заключить (рис. 2.3), что из четырех его действительных корней два меньше или равны единице по модулю, а два строго больше единицы. Поэтому  $\frac{1}{c^2} \left| \frac{\alpha_2}{h} \right| > 1$  и  $k_\mu < 1$ . Более того,  $k_\mu^2$  имеет порядок квадрата сжатия Земли:  $k_\mu^2 \sim I_2^2$ . Действительно,

$$|h| \sim V^2, \quad |\alpha_2| \sim \left( \frac{d\mu}{d\tau} \right)^2 \sim \left\{ \frac{d \left( \frac{R}{c} \right)}{\frac{dt}{R^2}} \right\}^2,$$

откуда

$$c^2 \left| \frac{h}{\alpha_2} \right| \sim \frac{c^4}{R^4} = I_2^2.$$

Но если  $k < 1$ , то последний интеграл есть уже эллиптический интеграл первого рода в нормальной форме Лежандра, а потому тотчас же можно написать

$$\mu = \operatorname{sn} [\sqrt{2|\alpha_2|} (\tau + \beta_\mu)]. \quad (2.8.3)$$

Период по  $\tau$  координаты  $\mu$  будет

$$T_\mu = \frac{4K(k_\mu)}{\sqrt{2|\alpha_2|}}.$$

Теперь рассмотрим координату  $\lambda(\tau)$ . Действительные корни полинома  $L(\lambda)$  (2.8.1):

$$\lambda_1 = \frac{fM}{2|h|c} - \sqrt{\left( \frac{fM}{2|h|c} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left| \frac{\alpha_2}{h} \right|},$$

$$\lambda_2 = \frac{fM}{2|h|c} + \sqrt{\left( \frac{fM}{2|h|c} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left| \frac{\alpha_2}{h} \right|},$$

и исследуемый интеграл можно представить в виде

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2+1)(\lambda_2-\lambda)(\lambda-\lambda_1)}} = \sqrt{2c^2|h|} (\tau + \beta_\lambda). \quad (2.8.4)$$

Этот интеграл приводится к нормальной форме более сложным путем. Опуская выкладки, напишем окончательный результат:

$$\lambda = \frac{A + B \operatorname{cn} \sigma (\tau + \beta_\lambda)}{C + D \operatorname{cn} \sigma (\tau + \beta_\lambda)}, \quad (2.8.5)$$

где

$$A = \lambda_2 - \lambda_1 \sqrt{\frac{\lambda_2^2 + 1}{\lambda_1^2 + 1}}, \quad B = \lambda_2 + \lambda_1 \sqrt{\frac{\lambda_2^2 + 1}{\lambda_1^2 + 1}},$$

$$C = 1 - \sqrt{\frac{\lambda_2^2 + 1}{\lambda_1^2 + 1}}, \quad D = 1 + \sqrt{\frac{\lambda_2^2 + 1}{\lambda_1^2 + 1}},$$

$$\sigma = \sqrt{2c^2 |k| \sqrt{(\lambda_1^2 + 1)(\lambda_2^2 + 1)}},$$

$$k_\lambda^2 = \frac{1}{4} \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^2 - [\sqrt{\lambda_2^2 + 1} - \sqrt{\lambda_1^2 + 1}]^2}{\sqrt{(\lambda_2^2 + 1)(\lambda_1^2 + 1)}}.$$

Отсюда период по  $\tau$  функции  $\lambda(\tau)$  равен

$$T_\lambda = \frac{4K(k_\lambda)}{\sigma}.$$

Так как  $T_\lambda \neq T_\mu$ , то движение неперiodично. Когда  $\lambda$  достигает исходного значения,  $\mu$  несколько «сдвигается». В результате траектория имеет вид «розетки» (рис. 2.10). Разность  $T_\lambda - T_\mu$  характеризует скорость движения «большой полуоси оскулирующего эллипса» орбиты.

Отметим наличие почти круговых («квазикруговых») орбит  $\lambda = \text{const}$ , отвечающих равенству  $\lambda_1 = \lambda_2$ .

Сказанного, пожалуй, достаточно для первого знакомства с задачей; заинтересовавшийся читатель обратится за подробностями к первоисточникам, полная библиография которых имеется в книге В. Г. Демина [2.3].

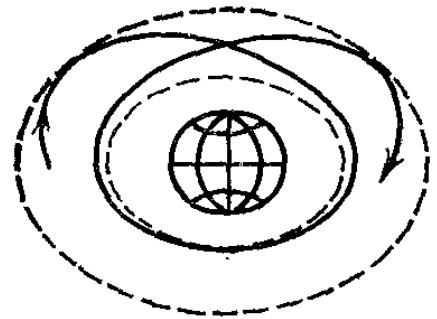


Рис. 2.10. Траектория полярного спутника.

# ЕЩЕ ОДНА СТАРАЯ ЗАДАЧА, ВОЗВРАЩЕННАЯ К НОВОЙ ЖИЗНИ

Культурный человек только слегка обгрызает кости,  
а потом бросает их под стол.

Фафик \*)

(Из «Мыслей людей великих, средних и песика Фафика»)

## 1. Что за задача?

В этом очерке речь пойдет о такой задаче. Пусть материальная точка движется в поле тяготения ньютоновского притягивающего центра, и пусть еще на материальную точку действует «возмущающее» ускорение, постоянное по величине и направлению (рис. 3.1). Эта задача рассматривалась еще Лагранжем, в XIX веке французскими математиками Селерье, Сен-Жерменом, а также И. В. Мещерским. Они показали интегрируемость в квадратурах этой задачи, однако не довели решение до конца, так как полученные ими квадратуры имели неудобную для обращения форму. В дальнейшем указанная задача была заброшена под стол и не получила, по-видимому, развития.

Эту интегрируемую, но полузабытую задачу возродили к новой жизни шестидесятые годы двадцатого века. Для космических полетов недалекого будущего проектируются и разрабатываются так называемые «двигатели малой тяги» (ионные, плазменные и т. п.), которые должны придавать космическому аппарату небольшое реактивное ускорение в течение очень большого промежутка времени (подробнее см. в следующих очерках). Можно представить ситуацию, когда двигатель малой тяги дает ускорение, постоянное по величине и направлению. Тогда движение космического корабля может быть описано в рамках

---

\*) Фафик — пес из породы терьеров, сотрудник польского журнала «Пшекруй».

указанной классической задачи Селерье и Сен-Жермена.

Важное приложение этой задачи — исследование влияния светового давления на траекторию спутника. Как известно, солнечное излучение создает малое, но заметное давление на освещенные части тел; существуют спутники, для которых сила светового давления является главной возмущающей силой. Например, американские спутники типа «Эхо» представляют собой огромные (до 30—40 метров в диаметре) надувные баллоны. Из-за малой массы и большой поверхности этих спутников возмущения в их движениях, вызванные световым давлением, будут очень существенны. На небольшом (сравнительно) интервале времени, пока Солнце не сместилось заметным образом в своем годовом движении по небесной сфере, можно считать, что сила светового давления дает постоянное по величине и направлению («от Солнца») ускорение. Тогда опять приходим к модели движения, описываемой нашей классической задачей.

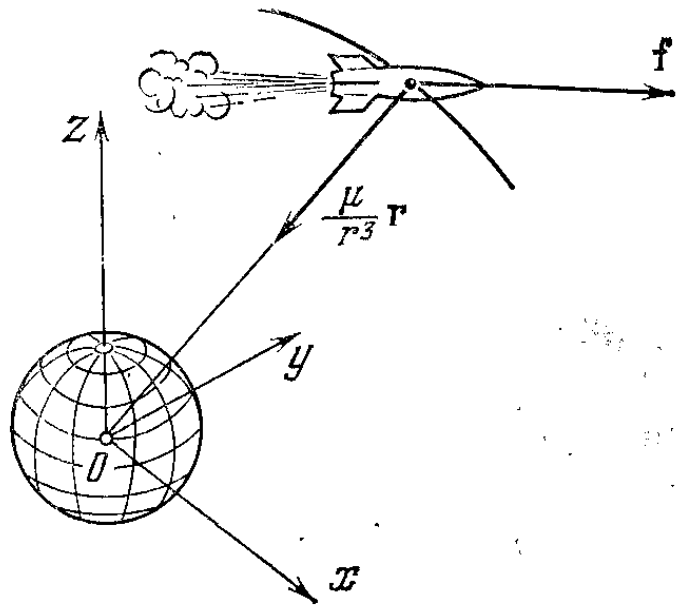


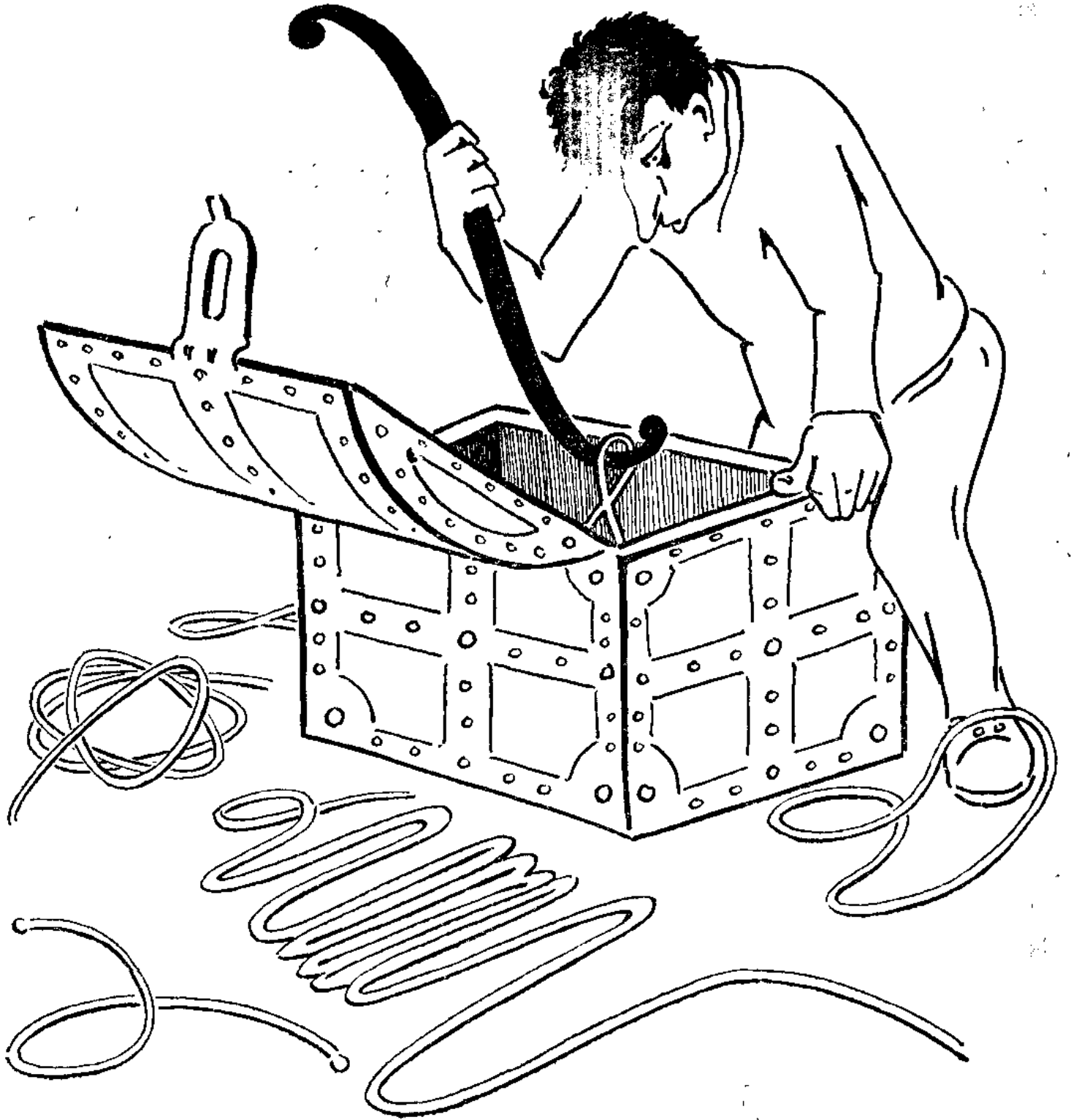
Рис. 3.1. Схема действующих сил.

Не удивительно, что в последние годы задача о движении в ньютоновском поле сил при наличии еще и постоянного вектора добавочного ускорения была извлечена из сундуков забвения и очищена от пыли веков [3.1—3.6, 3.9]. В дальнейшем изложении будем следовать, в основном, работам [3.1, 3.2] автора этой книги.

## 2. Коротко об уравнениях движения и их интегрировании

Свяжем с ньютоновским центром  $O$  декартову систему координат  $Oxyz$  (рис. 3.1) и введем безразмерные переменные формулами

$$\{r\} = \frac{\{r_R\}}{r_0}, \quad \{v\} = \frac{\{V_R\}}{\sqrt{r_0 g_0}}, \quad t = \frac{t_R}{\sqrt{\frac{r_0}{g_0}}}, \quad \{f\} = \frac{\{f_R\}}{g_0},$$



где  $g_0 = \mu/r_0^2$ , а остальные обозначения таковы:  $\{r\}$ ,  $\{v\}$ ,  $\{f\}$ ,  $t$  — соответственно безразмерные координаты, компоненты скорости, компоненты реактивного ускорения и время;  $\{r_R\}$ ,  $\{V_R\}$ ,  $\{f_R\}$ ,  $t_R$  — аналогичные размерные величины;  $r_0$  — фиксированное (например, начальное) расстояние от центра притяжения,  $g_0$  — ускорение силы тяготения на расстоянии  $r_0$  от притягивающего центра.

Направим ось  $x$  неподвижной системы координат вдоль постоянного вектора  $\mathbf{f}$  реактивного ускорения. Тогда уравнения движения принимают вид

$$\ddot{x} = -\frac{x}{r^3} + f, \quad \ddot{y} = -\frac{y}{r^3}, \quad \ddot{z} = -\frac{z}{r^3}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (3.2.1)$$

Если бы в правой части первого из этих уравнений не было величины  $f$ , то мы имели бы просто дифференциальные уравнения кеплеровского движения. Наличие параметра  $f$ , как будет видно из дальнейшего, влечет за собой обильное разнообразие движений.

Уравнения (3.2.1) имеют следующие первые интегралы:

интеграл энергии

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{r} - fx = h, \quad (3.2.2)$$

интеграл площадей (относительно оси  $x$  — направления ускорения  $\mathbf{f}$ )

$$zy\dot{y} - yz\dot{z} = -k_0 \quad (3.2.3)$$

и третий интеграл, обобщающий так называемый «интеграл Лапласа» кеплеровского движения,

$$x\dot{r}\dot{r} - \frac{x}{r} - \frac{3}{2}fx^2 - \frac{1}{2}fr^2 - 2hx = c. \quad (3.2.4)$$

Эти интегралы нам пригодятся в дальнейшем. А сейчас отметим только, что существование достаточного количества первых интегралов уравнений движения (в данном случае трех) является условием интегрируемости этих уравнений. Поэтому, начиная интегрирование какой-либо системы уравнений, полезно найти, по возможности, все ее независимые (не следующие друг из друга) первые интегралы. Наличие трех первых интегралов (3.2.2) — (3.2.4) позволяет свести задачу к квадратурам.

Конечно, как и в задаче двух неподвижных центров, интегрирование можно было бы провести методом Гамильтона — Якоби, выбрав подходящую систему криволинейных координат. Однако, зная систему трех первых интегралов (3.2.2) — (3.2.4), можно пытаться провести интегрирование непосредственно, преобразуя эти интегралы к должному виду. А именно, введем новые переменные

$$u = r - x, \quad v = r + x, \quad (3.2.5)$$

так что

$$r = \frac{1}{2}(u + v), \quad x = \frac{1}{2}(u - v), \quad (3.2.6)$$

и третью переменную  $\varphi$ , определяемую соотношениями

$$\cos \varphi = \frac{y}{r_1}, \quad \sin \varphi = \frac{z}{r_1}, \quad r_1 = \sqrt{y^2 + z^2}. \quad (3.2.7)$$

Подставим вместо  $x, y, z$  в первые интегралы (3.2.2) — (3.2.4) новые переменные  $u, v, \varphi$  согласно (3.2.5) — (3.2.7) и введем вместо времени  $t$  параметр  $\tau$ , монотонно увеличивающийся вместе со временем так, что

$$d\tau = \frac{dt}{r}. \quad (3.2.8)$$

Тогда интегралы (3.2.2) — (3.2.4) легко разрешаются относительно производных  $\frac{du}{d\tau}, \frac{dv}{d\tau}, \frac{d\varphi}{d\tau}$  и последующей квадратурой интегрирование заканчивается. Опуская «кухню» интегрирования, приведем лишь окончательные результаты.

Оказывается, что движение подчиняется следующим квадратурам:

$$\int \frac{dv}{\sqrt{V(v)}} = \tau + c_1, \quad \int \frac{du}{\sqrt{U(u)}} = \tau + c_2, \quad (3.2.9)$$

где

$$\left. \begin{aligned} V(v) &= fv^3 + 2hv^2 + 2(1+c)v - k_0^2, \\ U(u) &= -fu^3 + 2hu^2 + 2(1-c)u - k_0^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.10)$$

Интегралы типа (3.2.9), как мы знаем, обращаются при помощи эллиптических функций Якоби. Обращение этих интегралов дает параметрические уравнения траектории



во вращающейся плоскости, содержащей радиус-вектор  $r$  и ось  $x$ . Угол  $\varphi$  поворота этой плоскости вокруг оси  $x$

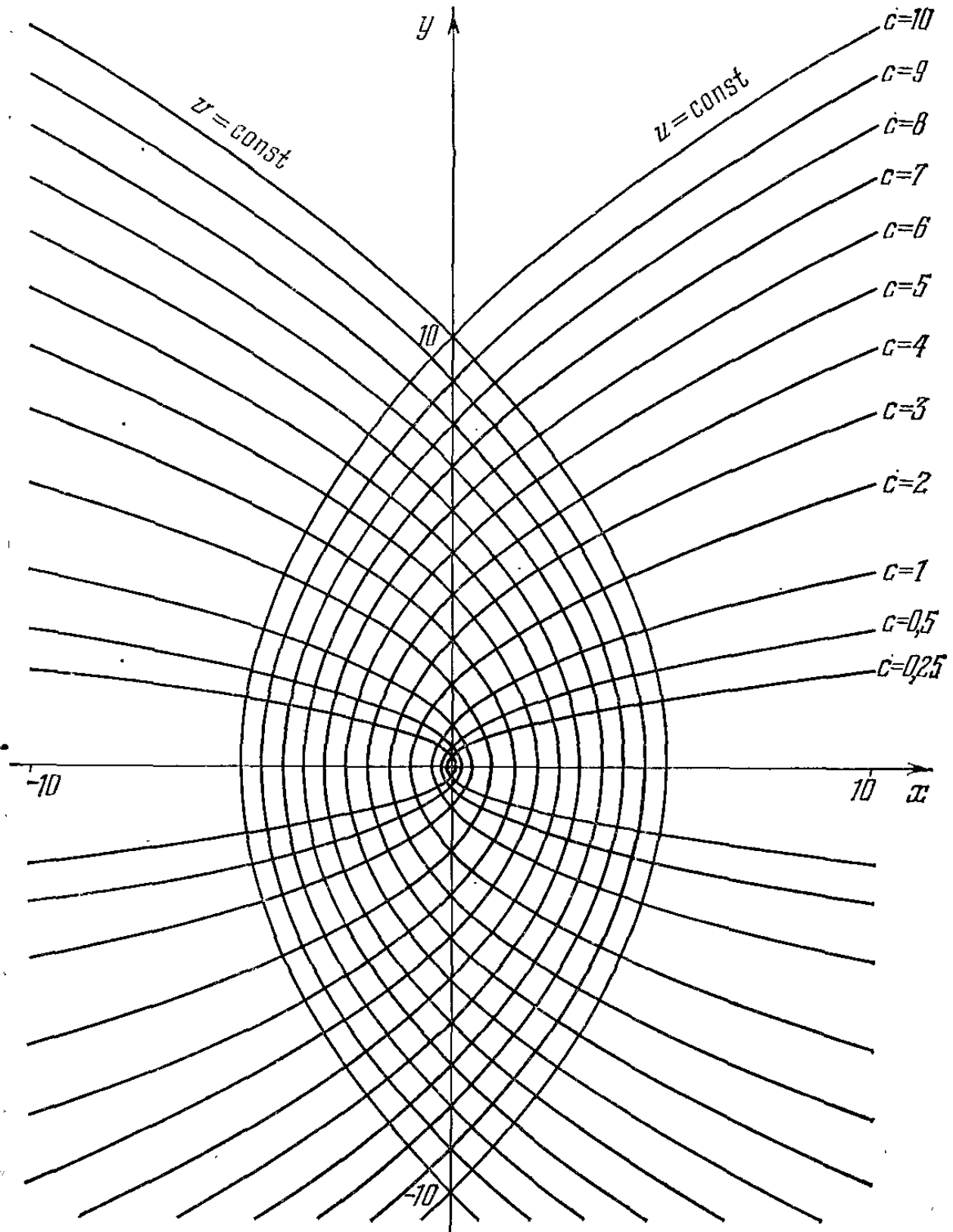


Рис. 3.2. Параболоидальная система координат.

определяется согласно (3.2.3) и (3.2.7) по формуле

$$\varphi - \varphi_0 = k_0 \int_0^{\tau} \frac{r d\tau}{r^2 - x^2}, \quad (3.2.11)$$

где, конечно,  $r$  и  $x$  считаются уже известными функциями  $\tau$  (в силу (3.2.6) и обращенных интегралов (3.2.9)). Видим, что  $\varphi$  меняется монотонно по  $\tau$ . Из (3.2.8) получим

$$t - t_0 = \int_0^\tau r d\tau, \quad (3.2.12)$$

и задача полностью сведена к квадратурам.

Отметим, что выбранная нами для интегрирования система криволинейных координат  $u, v, \varphi$  является параболоидальной. Координатные поверхности  $u = \text{const}, v = \text{const}$  суть параболоиды вращения с общей осью, совпадающей с осью  $x$  декартовой системы координат. В плоскости  $\varphi = \text{const}$  координатная сетка задается семейством парабол  $u = \text{const}, v = \text{const}$ , как это изображено на рис. 3.2.

Можно заранее сказать, что параболоидальная система координат наиболее естественна для рассматриваемой задачи. В самом деле, на достаточно большом расстоянии от центра притяжения  $f \gg 1/r^2$  (так как  $f$  постоянно, а  $1/r^2$  может быть сколь угодно мало). Значит, движение будет близко в этом случае к движению лишь под действием вектора  $f$  постоянного ускорения (ньютоновское ускорение  $1/r^2$  будет мало). А движение в однородном поле сил (то есть в таком поле, где  $f = \text{const}$ ), как известно, происходит по параболической траектории (и ось параболической траектории имеет направление  $f$ ).

### 3. Плоское движение

Всюду в дальнейшем мы ограничимся случаем плоского движения (в плоскости  $x, y$ ). Тогда  $k_0 = 0$  и  $\varphi = \varphi_0$ . Полиномы (3.2.10) представимы в виде

$$\left. \begin{aligned} V &= fv(v - v_2)(v - v_3), \\ U &= -fu(u - u_2)(u - u_3), \end{aligned} \right\} \quad (3.3.1)$$

причем корни полиномов (3.3.1) имеют значения

$$v_1 = 0, \quad v_2 = \frac{-h + \sqrt{h^2 - 2f(1+c)}}{f}, \quad v_3 = \frac{-h - \sqrt{h^2 - 2f(1+c)}}{f},$$

$$u_1 = 0, \quad u_2 = \frac{h + \sqrt{h^2 + 2f(1-c)}}{f}, \quad u_3 = \frac{h - \sqrt{h^2 + 2f(1-c)}}{f}.$$

Плоская задача имеет, таким образом, то несомненное достоинство, что все корни полиномов (3.3.1) (а значит, и модули эллиптических функций и другие параметры, описывающие движение) легко выражаются в явном виде через начальные условия (через значения констант  $h, c$ ). Поэтому удобно провести классификацию движений в плоскости  $h, c$  при фиксированном значении  $f \neq 0$ . Это делается без особого труда, так как, повторяю, имеются явные зависимости координат  $u, v$  от  $\tau$  и постоянных  $h, c$ :  $u(\tau, h, c)$ ;  $v(\tau, h, c)$ . Однако эти зависимости, даваемые эллиптическими функциями Якоби, различны в различных случаях (которых довольно много). Мы не будем

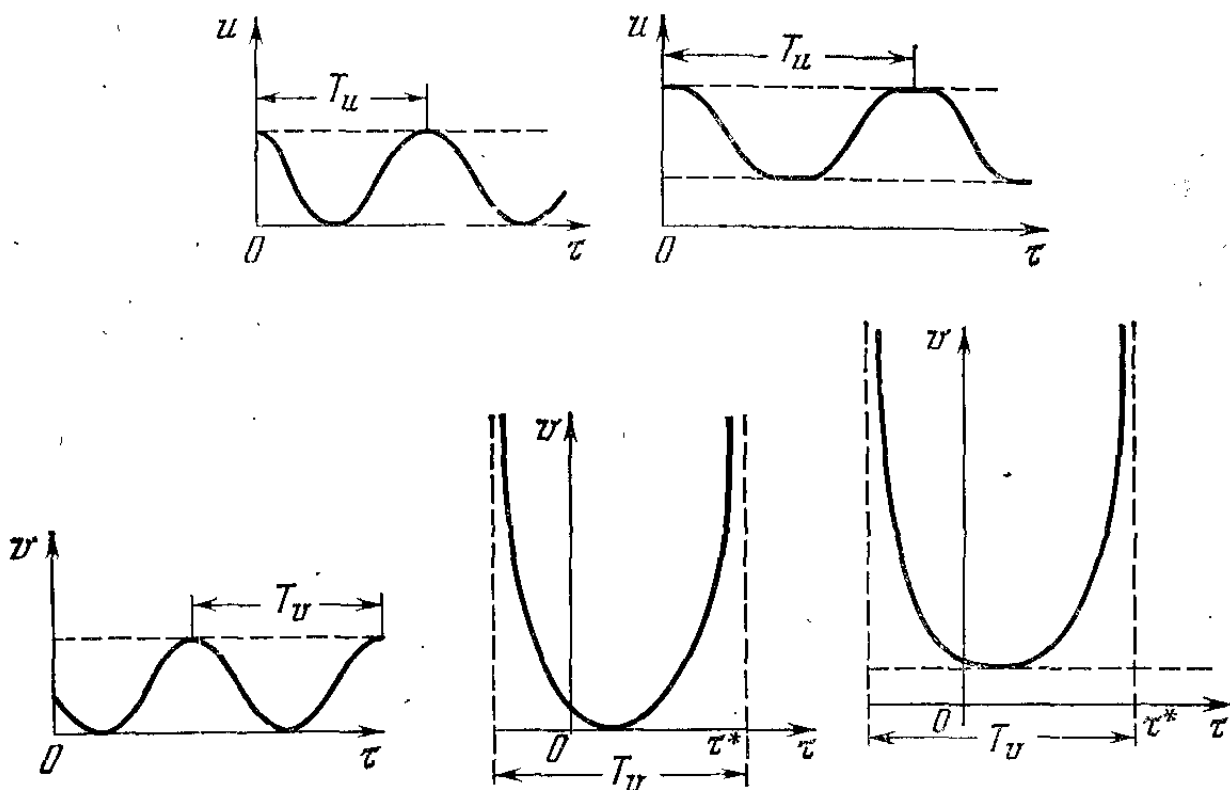


Рис. 3.3. Возможные типы зависимостей  $u(\tau), v(\tau)$ .

выписывать эти зависимости, а расскажем лишь о результатах анализа. Детали читатель может посмотреть в работах [3.1, 3.2]. Важен для характеристик траекторий лишь тот факт, что траектории определяются комбинациями таких зависимостей  $u(\tau)$  и  $v(\tau)$ , которые схематично изображены на рис. 3.3. Различие типов этих зависимостей объясняется тем, что при разных  $h$  и  $c$  корни  $u_i, v$  полиномов (3.3.1) имеют разные знаки и комплексность. Заметим еще, что если  $v(\tau) \rightarrow \infty$  при  $\tau \rightarrow \tau^*$ , то и реальное время  $t \rightarrow \infty$  при  $\tau \rightarrow \tau^*$ , так что бесконечное

значение  $v$  может достигаться лишь на бесконечном интервале времени.

Имеются две качественно различные возможности для зависимости  $u(\tau)$  и три — для зависимости  $v(\tau)$  (рис. 3.3). Характер траектории полностью определяется следующими двумя факторами: 1) какая именно комбинация функций  $u(\tau)$ ,  $v(\tau)$  из шести логически возможных (рис. 3.3) имеет место для данной траектории; 2) каково значение отношения  $T_u/T_v$  периодов функций  $u(\tau)$ ,  $v(\tau)$ . Ввиду того, что для  $u(\tau)$ ,  $v(\tau)$  имеются явные выражения (через функции Якоби), то ответы на вопросы 1) и 2) всегда можно получить.

#### 4. Описание траекторий плоского движения

Эти траектории принадлежат к четырем основным типам:

I. Неограниченные, самопересекающиеся, не огибающие центра притяжения. Область значений параметров для траекторий типа I:

$$c < -1.$$

II. Неограниченные, самопересекающиеся, огибающие центр притяжения. Область значений параметров для этих траекторий:

$$-1 < c < +1, \quad \frac{h}{\sqrt{f}} > -\sqrt{2(1+c)}.$$

III. Неограниченные без самопересечений. Для них область значений параметров:

$$c > 1, \quad \frac{h}{\sqrt{f}} > \sqrt{-2(1-c)}.$$

IV. Ограниченные. Такие траектории существуют при

$$-1 < c < +1, \quad \frac{h}{\sqrt{f}} < -\sqrt{2(1+c)}.$$

В этой области, однако, могут существовать и траектории типа I.

В оставшейся части плоскости  $c$ ,  $h/\sqrt{f}$  (а именно при  $c > 1$ ,  $h/f < \sqrt{-2(1-c)}$ ) реальных движений нет. Разбиение плоскости  $c$ ,  $h/\sqrt{f}$  на области I, II, III, IV дано на рис. 3.4. На этом же рисунке схематично изображены

траектории разных типов (а именно такие типы траекторий, которые характерны для данной части плоскости

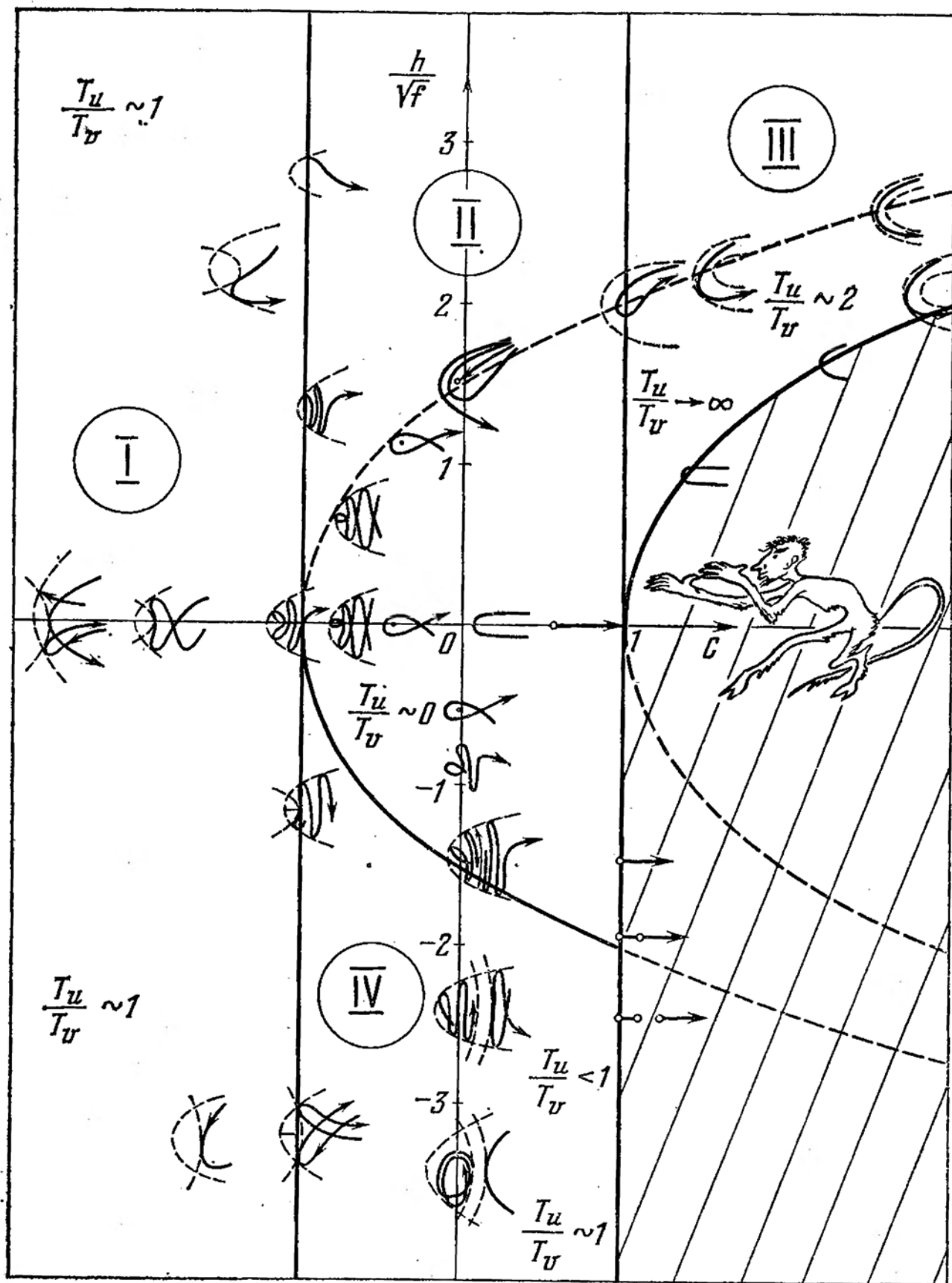


Рис. 3.4. Разбиение плоскости  $s, h/\sqrt{f}$  на области I, II, III, IV (с видом траекторий).

$s, h/\sqrt{f}$ ). Перейдем к рассмотрению свойств траекторий внутри областей I — IV и на их границах. Будем

останавливать внимание лишь на самых интересных траекториях.

Траектории типа I — неограниченные и при  $t \rightarrow \infty$  стремятся к какой-либо параболе  $u = u^*$ ; эти траектории не огибают центра притяжения и довольно «плавные»; при больших значениях  $c$  они носят характер дуг произвольной ширины (в том числе и очень узких). Очень интересно, что существуют «самовозвращающиеся» траектории, приводящие в некоторую точку  $u_k, v_k$  с нулевой скоростью; равновесия в точке  $u_k, v_k$  нет (силы не нулевые), и движение пойдет дальше по той же самой траектории, но в обратном направлении! Ситуация получается

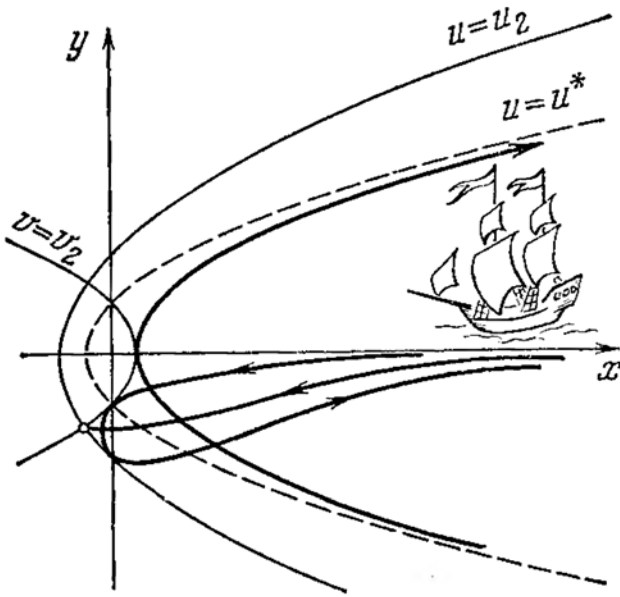


Рис. 3.5. Траектории типа I.

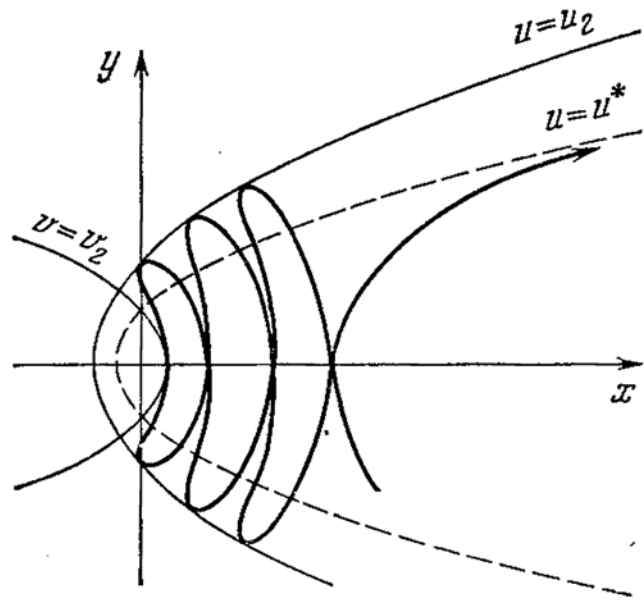


Рис. 3.6. Траектория типа I с самопересечениями.

такая, как если бы мы долго шли по тропинке, которая вдруг окончилась тупиком, так что мы вынуждены сделать «поворот кругом, назад шагом марш!» по той же самой тропинке. Два космических корабля, запущенные в разные моменты времени по такой траектории, через некоторое время неизбежно столкнутся друг с другом! (Пример чисто математической ситуации. В реальных условиях капитаны кораблей вовремя изменят величину или направление тяги  $f$  и благополучно разойдутся; но это уже другая задача, здесь не рассматриваемая.) На рис. 3.5 изображены только что описанные траектории. Если величина  $c$  не очень велика, то траектории могут самопересекаться (рис. 3.6) и носить даже «змееобразный» характер (рис. 3.7).

Траектории типа II отличаются от траекторий предыдущего вида лишь способностью огибать центр притяжения (тем самым исключаются «самовозвращающиеся»

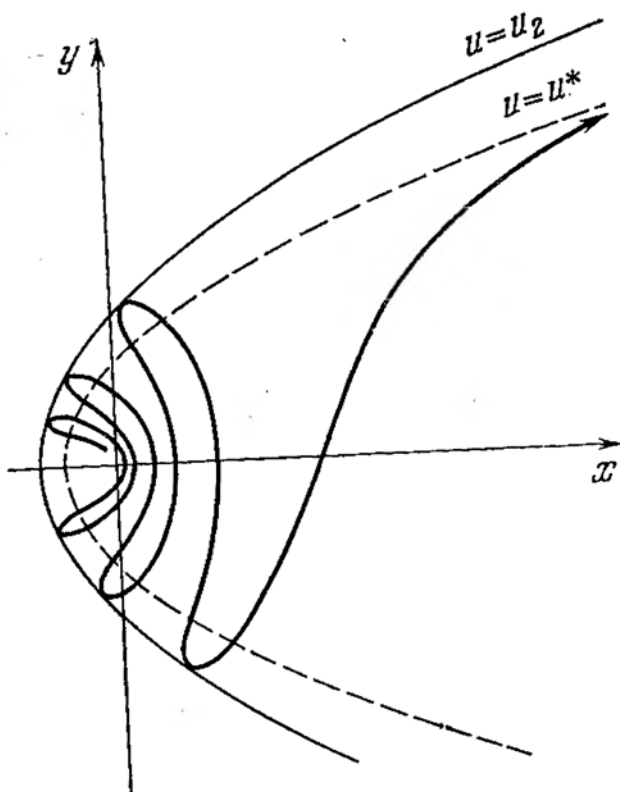


Рис. 3.7. «Змееобразная» траектория типа I.

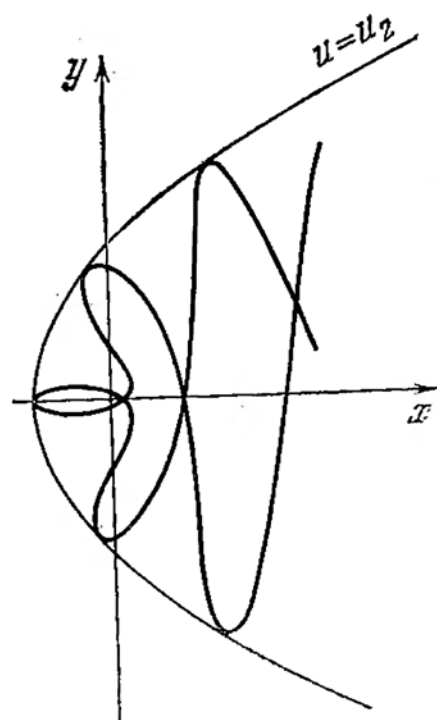


Рис. 3.8. Траектория типа II с самопересечениями.

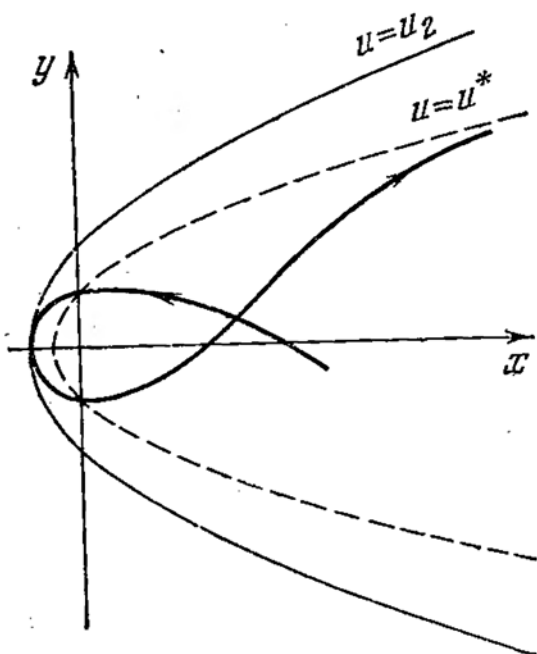


Рис. 3.9. Петлеобразная траектория типа II.

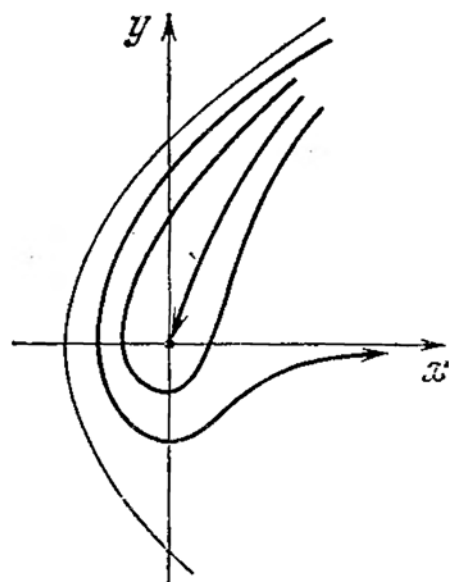


Рис. 3.10. Траектории типа II.

траектории). На рис. 3.8—3.11 изображены некоторые из траекторий этого типа.

Траектории типа III очень «плавно», без самопересечений (рис. 3.12, 3.13), огибают центр притяжения. Среди

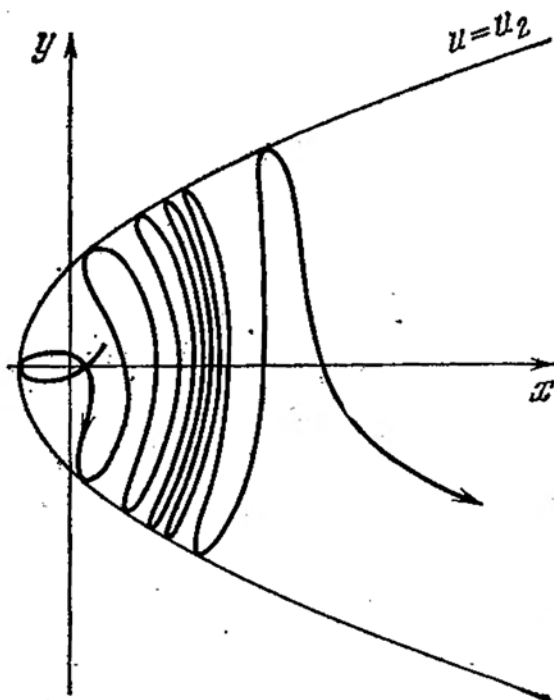


Рис. 3.11. Змееобразная траектория типа III.

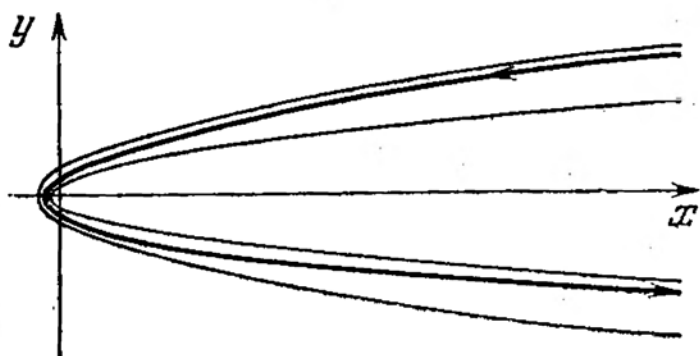


Рис. 3.12. Траектория типа III.

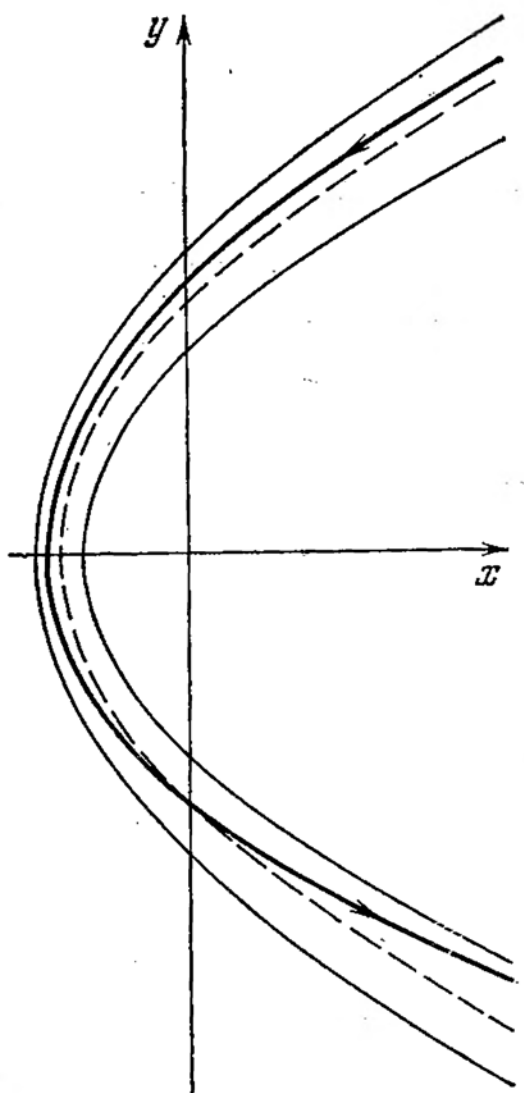


Рис. 3.13. Траектория типа III.

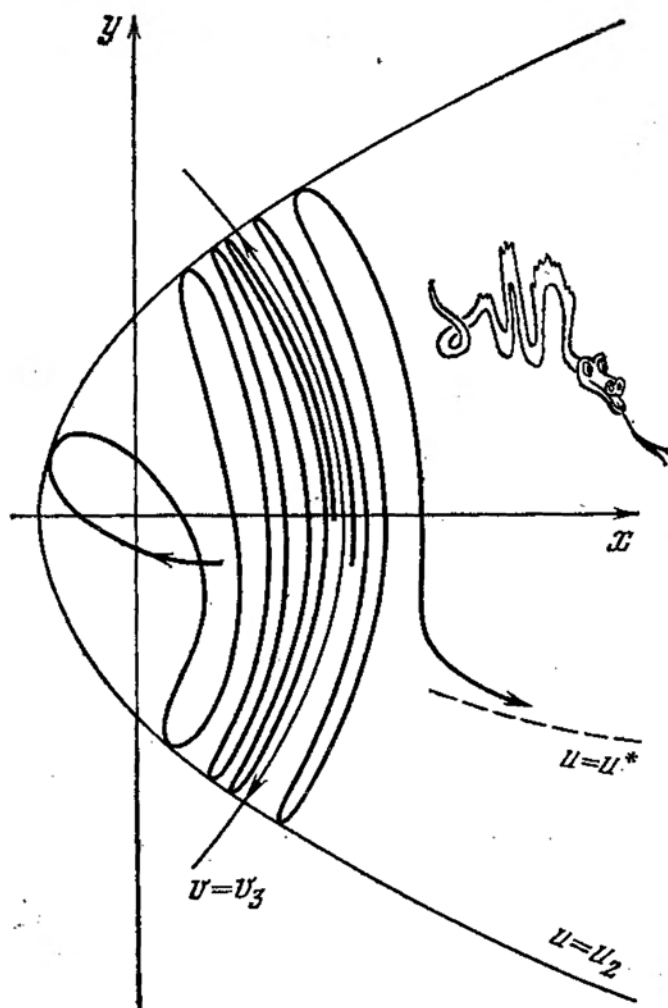


Рис. 3.14. Траектории на границе областей II и IV.



траекторий этого вида есть *чисто параболические* траектории, в частности радиальные (движение происходит вдоль направления  $f$ ).

Вернемся к «змееобразной» траектории типа II (рисунок 3.11). Она имеет заметное «сгущение» петель в «средней», так сказать, своей части. Интересно проследить, что делается с подобной траекторией при переходе из области II в область IV (ограниченных движений). На этой границе происходит следующее расщепление нашей траектории на три новых (рис. 3.14). Прежде всего, на месте сгущения появляется *периодическая траектория*  $v = \text{const} = v_3$ . Движение материальной точки происходит по *ограниченной дуге этой параболы*, а именно по участку, заключенному внутри некоторой параболы  $u = u_2$ . Материальная точка, колеблясь, движется туда и обратно по дуге  $v = v_3$  между двумя точками с координатами  $u = u_2, v = v_3$ . Слева к этой траектории асимптотически стремится при  $t \rightarrow \infty$  «змееобразная» ограниченная траектория. При приближении к  $v = v_3$  петли «змееобразной» траектории все теснее и теснее приближаются друг к другу. Полностью характер этой «змееобразной» траектории такой: она, колеблясь, удаляется от параболы  $v = v_3$ , один раз огибает центр притяжения, а затем, как было уже сказано, асимптотически при  $t \rightarrow \infty$  колеблющимся образом приближается к дуге параболы  $v = v_3$ . Хотя траектория и ограничена, но фактически она не поддается удобному описанию в терминах оскулирующих элементов: слишком велики возмущения от добавочного ускорения  $f$ , и траектория, как видим, не имеет ничего общего с «оскулирующим эллипсом».

Наконец, справа от дуги  $v = v_3$  уходит еще одна траектория, сначала змеевидно колеблющаяся, а затем, при  $t \rightarrow \infty$ , стремящаяся к некоторой параболе  $u = u^*$  (и вместе с ней уходящая в бесконечность, рис. 3.14).

Рассмотрим теперь траектории в области ограниченных движений (в этой области, как уже упоминалось, могут существовать и неограниченные траектории).

*Траектории типа IV.* При малом «соскальзывании» с границы между областями II и IV внутрь области IV плоскости  $s, h/\sqrt{f}$  получим траектории, изображенные на рис. 3.15. Ограниченная траектория заметно «змееобразна» из-за существенного влияния не малого добавочного ускорения  $f$ . Характер траектории таков: обогнув центр притяжения, материальная точка, колеблясь между

ветвями параболы  $u = u_2$ , движется в сторону увеличения значения  $v$  вплоть до  $v = v_3$ ; достигнув этой границы, точка в «попятном» (по  $v$ ) движении снова по змеевидной траектории приблизится к центру притяжения, обогнет его и т. д.

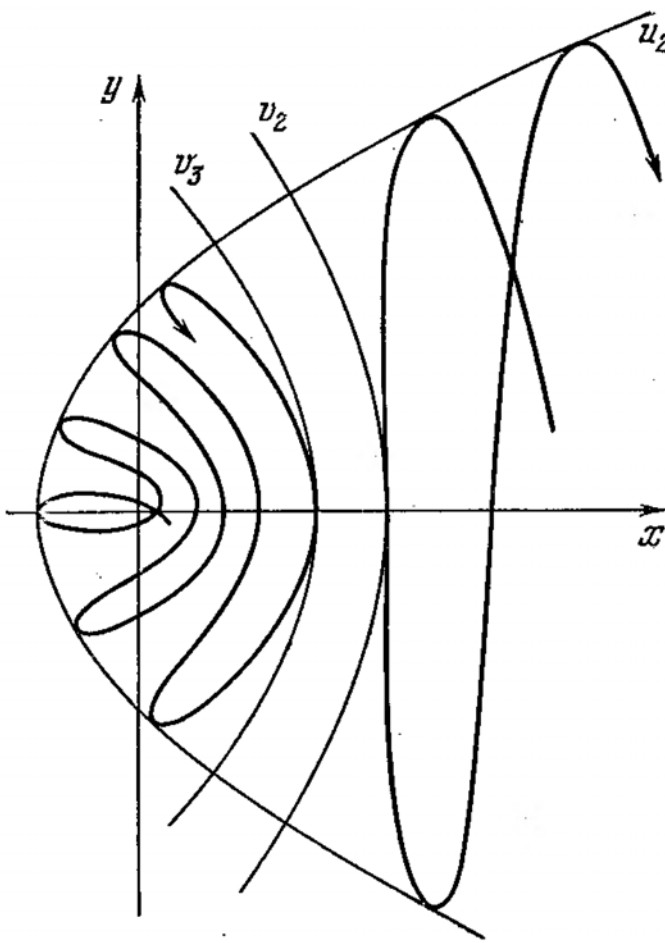


Рис. 3.15. Ограниченная и неограниченная траектории в области IV.

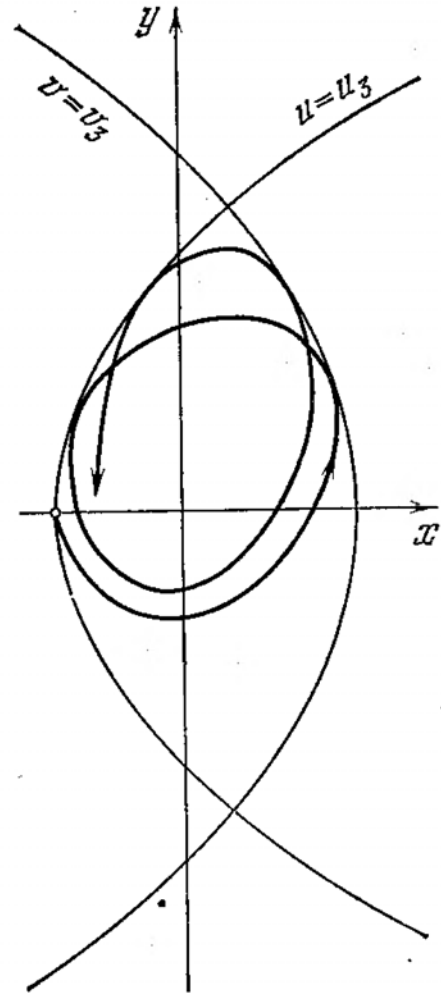


Рис. 3.16. Квазиэллиптическая траектория в области IV.

Наряду с ограниченными траекториями в этой области существуют и неограниченные траектории (см. рис. 3.15). Их неограниченность вызвана значительным удалением центра притяжения (вследствие чего влияние добавочного постоянного ускорения  $\bar{f}$  существенней, чем влияние ньютоновского притяжения).

С увеличением значения  $|h|/\sqrt{\bar{f}}$  ограниченные траектории существенно изменяют свою форму, приобретая квазиэллиптический вид. Это вызвано малостью влияния  $\bar{f}$  по сравнению с силой ньютоновского притяжения к центру. Траектория такого типа на значительном ее участке может быть описана в терминах медленно (в среднем)

касания траектории с границей  $v = v_3$  на рис. 3.16 перемещается вдоль  $v = v_3$  в сторону пересечения параболы меняющихся оскулирующих элементов. Вид этой траектории изображен на рис. 3.16.

В терминах оскулирующих элементов можно говорить, что большая полуось орбиты по величине примерно сохраняется, а направление линии апсид меняется. Причем удаление линии апсид от направления  $\mathbf{f}$  (от оси  $x$ ) сопровождается увеличением эксцентриситета, траектория эволюционирует в сторону все большего ее сжатия. Точка

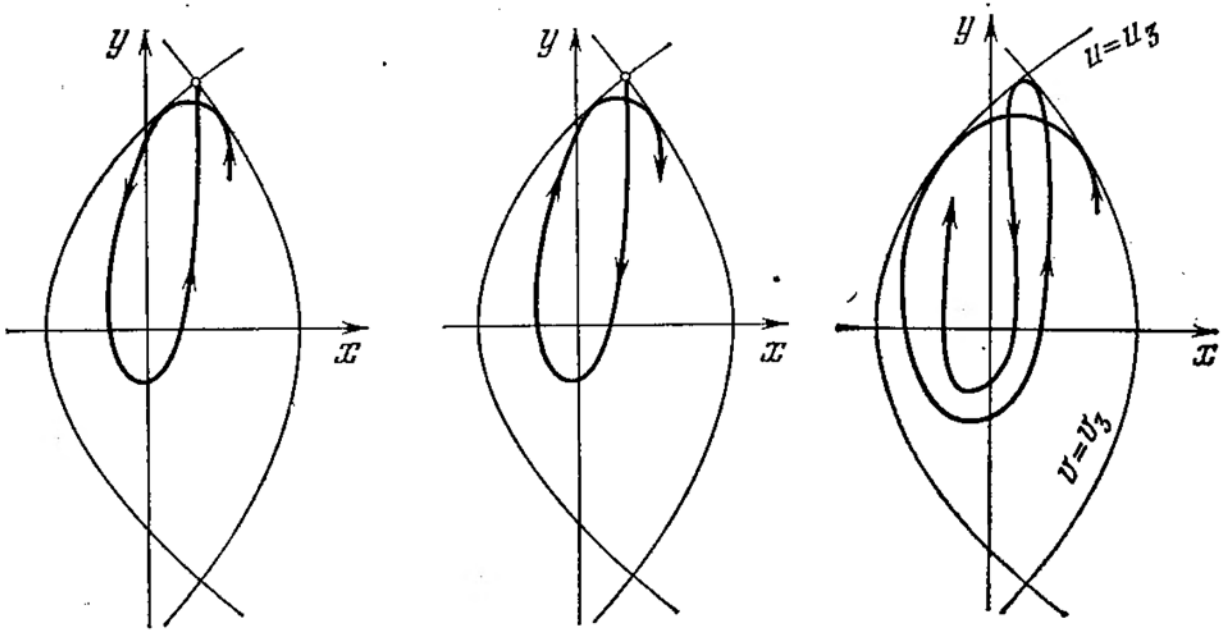


Рис. 3.17. Смена направления движения.

Рис. 3.18. Смена направления движения в общем случае.

$v = v_3$  с граничной параболой  $u = u_3$ . Если в процессе движения материальная точка попала в указанную критическую точку  $v = v_3, u = u_3$ , то скорость материальной точки здесь будет равна нулю и дальнейшее движение будет происходить по уже пройденной траектории, но в обратном направлении (рис. 3.17).

В общем случае траектория не пройдет через критическую точку (вероятность этого мала), но в районе критической точки все равно произойдет смена направления движения так, как это изображено на рис. 3.18, и эволюция траектории пойдет в обратном порядке. Прямому движению материальной точки сопутствует прямое движение линии апсид оскулирующего эллипса, обратному — обратное; удаление большой полуоси от направления  $\mathbf{f}$  сопровождается увеличением оскулирующего

эксцентриситета, сближение направлений линии апсид и вектора  $\mathbf{f}$  сопровождается уменьшением эксцентриситета.

Смена направления движения создает определенные трудности в описании движения в терминах оскулирующих элементов, так как в этот момент оскулирующие элементы меняются скачком [3.6].

Практически движущаяся точка может «не дожить» до смены направления движения, так как из-за большого «сжатия» траектории (увеличения эксцентриситета) траектория подойдет опасно близко к поверхности центрального тела (скажем, Земли) и в дальнейшем встретит эту поверхность на своем пути [3.6]. Для пространственных траекторий эта опасность гораздо менее существенна или вообще не существует, так как ограниченное движение происходит всегда вне области, ограниченной некоторыми двумя параболоидами вращения  $u = u^*$ ,  $v = v^*$  (вся Земля может спрятаться внутрь этой области и стать недосягаемой).

В заключение остановимся кратко на описании некоторых периодических траекторий. Так как во всей области IV  $T_u/T_v \leq 1$ , то это отношение может быть и рациональной дробью, что в случае ограниченных траекторий как раз соответствует их периодичности. Вид периодических траекторий зависит не только от отношения  $T_u/T_v$ , но и от разности начальных фаз  $u(\tau)$  и  $v(\tau)$ .

Некоторые периодические траектории изображены на рис. 3.19. Часть из них носит формальный характер, так как траектории проходят через центр притяжения. Особенно любопытны траектории, проходящие через критическую точку, в которой скорость равна нулю. Эти траектории имеют вид незамкнутых петель, вдоль которых и движется материальная точка попеременно в прямом и обратном направлении (рис. 3.19, а). На рис. 3.19 изображены траектории при  $T_u/T_v = 1/2$ . Траектории вида 3.19, а получаются при совпадении момента достижения минимума функции  $v(\tau)$  с моментом достижения максимума функции  $u(\tau)$  (назовем такие траектории траекториями в «противофазе»). На рис. 3.19, б, в — траектории с различным сдвигом фаз, а на рис. 3.19, г — траектории «в фазе» минимум  $v(\tau)$  достигается одновременно с минимумом  $u(\tau)$ . Последняя траектория проходит через центр притяжения.

На рис. 3.20 изображены траектории в фазе и противофазе при  $T_u/T_v = 1/3$ , а на рис. 3.21 — траектории при

$T_u/T_v = 2/3$ : в фазе и противофазе на рис. 3.21, а и «в  $1/4$  фазе» на рис. 3.21, б.

Материал этого очерка хорошо иллюстрирует богатство информации, предоставляемой точно интегрируемыми задачами. Змееобразные траектории, асимптотически

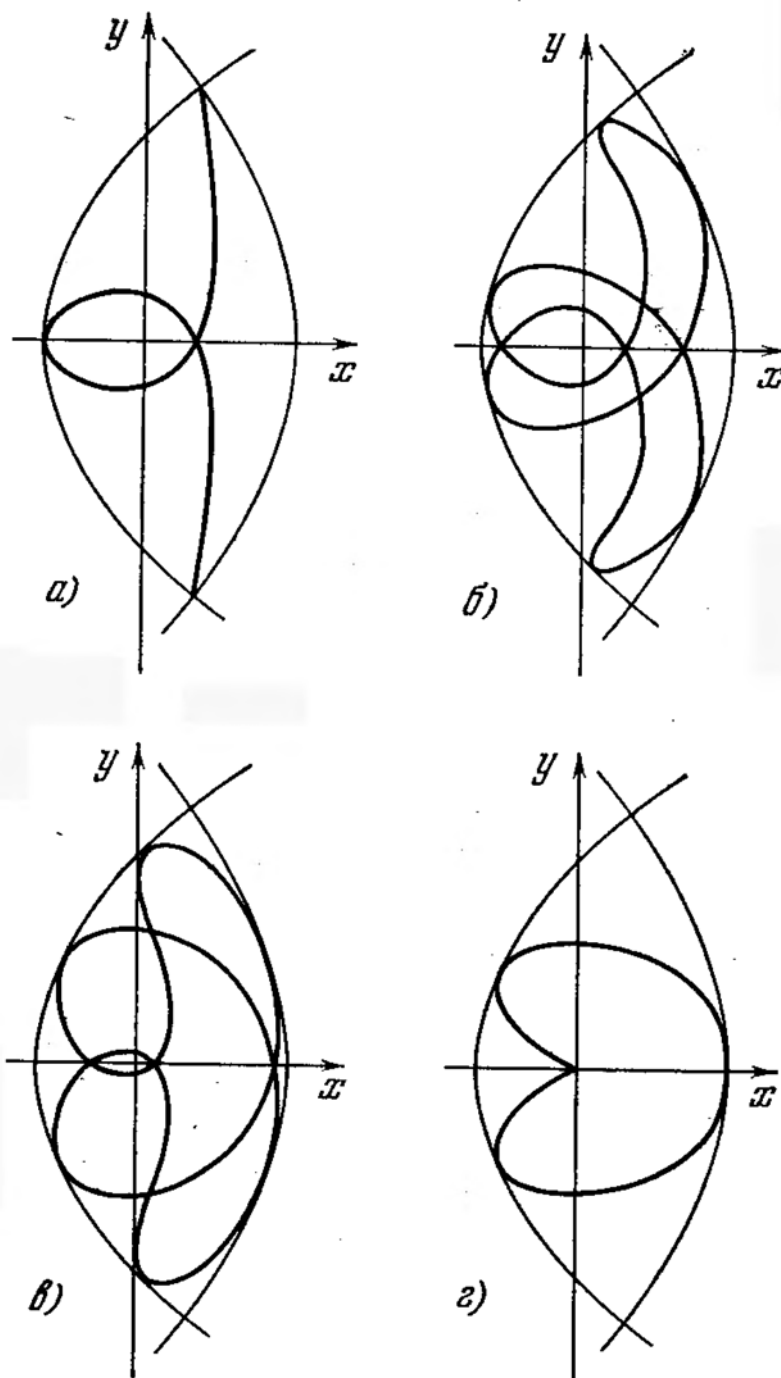


Рис. 3.19. Периодические траектории ( $T_u/T_v = 1/2$ ).

стремящиеся к колебаниям по ограниченной дуге параболы; траектории «возврата», по которым точка «вдруг» начинает двигаться в противоположном направлении; колебательные движения вдоль ограниченной дуги параболы; скачки в оскулирующих элементах медленно эволюционирующего эллипса и смена прямого движения на

попятное; возможность падения движущейся материальной точки на центральное тело после многих оборотов вокруг него; удивительные «усатые» периодические траектории — все эти эффекты трудно было бы ожидать с полной очевидностью от «суперпозиции» (наложения)

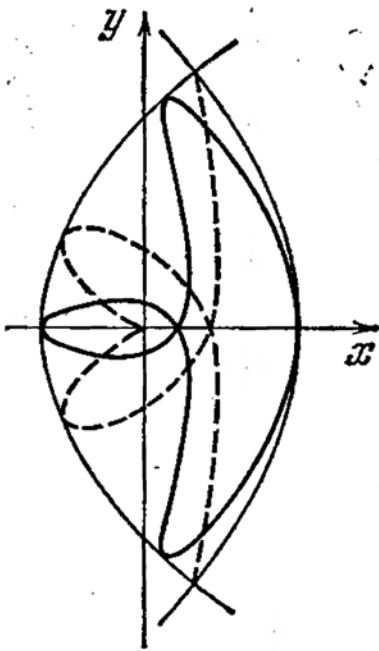


Рис. 3.20. Периодические траектории ( $T_u/T_v = 1/3$ ).

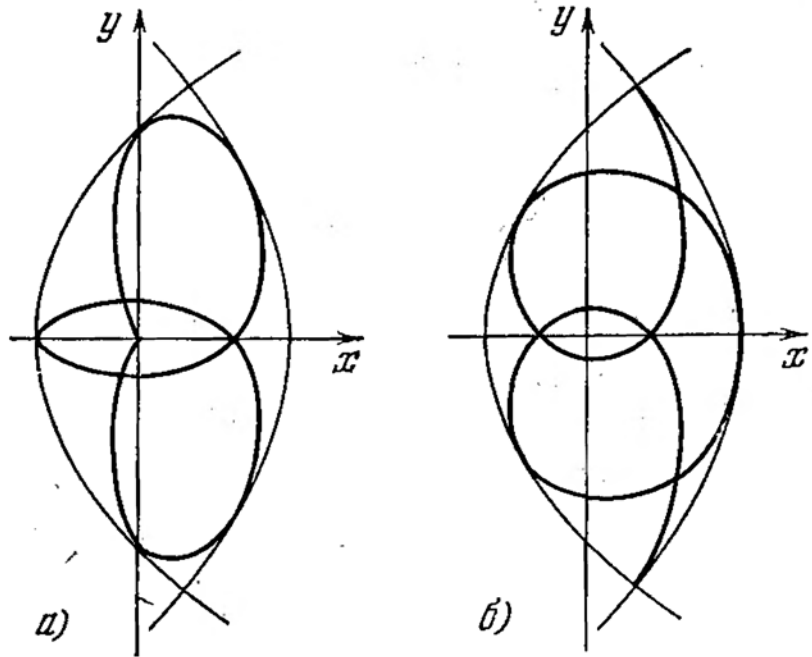


Рис. 3.21. Периодические траектории ( $T_u/T_v = 2/3$ ).

двух таких простых движений, как движение в ньютоновском центральном поле сил и движение в однородном поле сил. Но, проинтегрировав задачу точно, мы смогли обнаружить эти эффекты и, честно признаться, доброй половины из них мы никак не ждали.

## 5. Немного о влиянии светового давления на движение спутников Земли

Если спутник летает достаточно высоко над Землей, достаточно велик по размерам, но в то же время достаточно мал по массе, то на его движение очень сильно влияет световое давление солнечных лучей. Таким условиям удовлетворяют, например, американские спутники-баллоны «Эхо», представляющие собой 30—40-метровые надувные оболочки.

Спутники серии «Эхо» за сутки делают несколько витков вокруг Земли, а за одну-две недели — несколько десятков витков. Этого времени достаточно, чтобы уловить тенденции в короткопериодической эволюции орбит спут-

ников. Но за такое время Солнце не очень сильно смещается по небесной сфере, и поэтому направление силы светового давления, действующей на спутник, можно считать приближенно постоянным в пространстве. Кроме того, расстояние спутника от Солнца практически не меняется, поэтому и величина силы светового давления практически постоянна. В результате задача об изучении движения такого спутника сводится к постановке, рассматриваемой в настоящем очерке. Однако в эту постановку следует внести существенный корректив: спутник может периодически проходить через тень Земли, где сила светового давления отключается.

Отмеченный факт вносит новые качественные и количественные особенности в эволюцию движения спутника. Эти особенности довольно подробно рассмотрены Ю. А. Черниковым [3.7], М. Л. Лидовым [3.8] и другими исследователями, и мы не будем повторять их детальный анализ. Попробуем лишь, пользуясь известными нам закономерностями, понять качественные тенденции эволюции движения спутников, подверженных влиянию светового давления и периодически проходящих через тень Земли. Мы используем с этой целью сведения об эволюции ограниченных траекторий (рис. 3.16) и интеграл энергии (3.2.2), который запишем в виде

$$-\frac{1}{2a} - fx = h. \quad (3.5.1)$$

Здесь  $a$  — оскулирующая большая полуось орбиты.

Так как величина  $f$  ускорения от светового давления очень мала, то ограниченные траектории будут иметь квазиэллиптический вид.

Будем считать, что тень Земли — цилиндрическая, а движение плоское, так что всюду, кроме участка орбиты, для которого  $x_1 < x < x_2$  (рис. 3.22), спутник подвержен возмущающему действию ускорения  $\mathbf{f}$ , постоянного по величине и направленного параллельно оси  $x$ . На отрезке  $[x_1, x_2]$  это ускорение отключается; здесь  $|\mathbf{f}| \equiv 0$ . Так

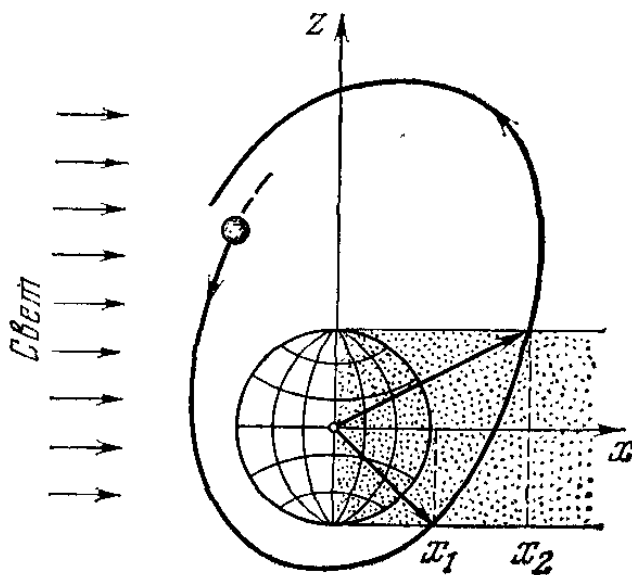


Рис. 3.22. Прохождение через тень Земли.



как для ограниченных движений  $h < 0$ , то можно записать

$$\frac{1}{2a} = |h| - fx \quad (3.5.2)$$

и рассмотреть интерпретацию движения на плоскости  $\frac{1}{2a}, x$ . На рис. 3.23 изображено семейство прямых (3.5.2) для фиксированного  $f$  и разных значений  $h$ . Мы знаем из анализа ограниченных траекторий, что при неизменном  $f$  и фиксированном  $h$  значения  $x$  не могут выйти из некоторого интервала  $-x^* < x < +x^*$ . Поэтому на плоскости

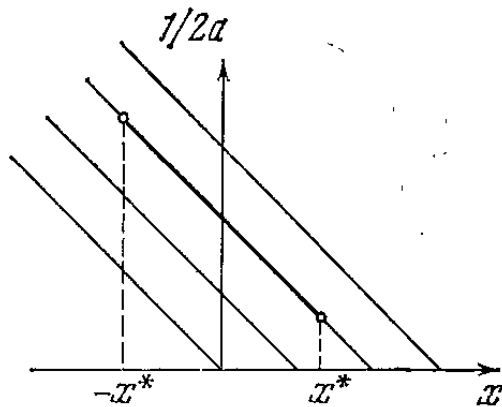


Рис. 3.23. Интерпретация движения на плоскости  $x, 1/2a$ .

$x, 1/2a$  изображающая точка будет колебаться вдоль отрезка прямой (3.5.2) внутри отрезка  $[-x^*, x^*]$ , время от времени достигая его границ; размах колебаний на каждом цикле будет, конечно, различным, но это не имеет особого значения для нашего анализа.

Пусть теперь движение при фиксированном  $h$  начинается в некоторой точке  $x_0$ , а в некоторой точке  $x_1 > 0$  произошло «отключение» ускорения  $f$ , то есть спутник вошел в земную тень. С этого момента движение в плоскости  $\frac{1}{2a}, x$  будет происходить уже по прямой  $\frac{1}{2a} = \text{const}$  (рис. 3.24) вплоть до значения  $x = x_2$ , где спутник выходит из тени.

Рассмотрим ситуацию, изображенную на исходном рисунке, на котором вход в тень происходит ближе к Земле, чем выход из тени. Тогда после входа в тень координата  $x$  продолжает увеличиваться ( $x > x_1$ ) и, как видно из рисунка на плоскости  $\frac{1}{2a}, x$ , после выхода из тени движение переходит на более высокий уровень энергии  $|h|$ . Это значит, что в среднем значение большой полуоси орбиты уменьшилось. Здесь мы наблюдаем появление нового качества, вызванного влиянием тени. Если без «отключения» ускорения имеются лишь короткопериодические колебания величины большой полуоси, то вход и выход спутника из тени вызывают систематические (долгопериодические) изменения большой полуоси. Возможная цепочка



переходов на все более и более высокие уровни энергии изображена на рис. 3.25. Теперь заметим, что вход в тень происходит ближе к Земле, чем выход, лишь (при ситуации, изображенной на рисунке) в прямом движении; оно, как мы знаем, сопровождается прямым движением линии апсид, которое в данном случае соответствует удалению линии апсид от направления ускорения  $f$ . Из анализа ограниченных траекторий мы видели, что такое

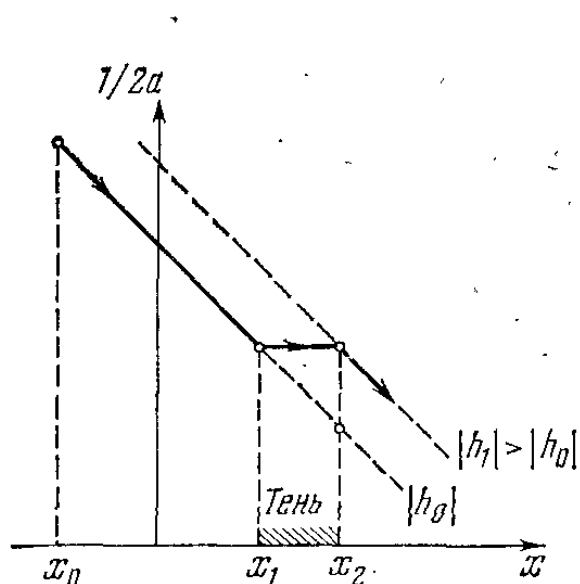


Рис. 3.24. Интерпретация влияния тени.

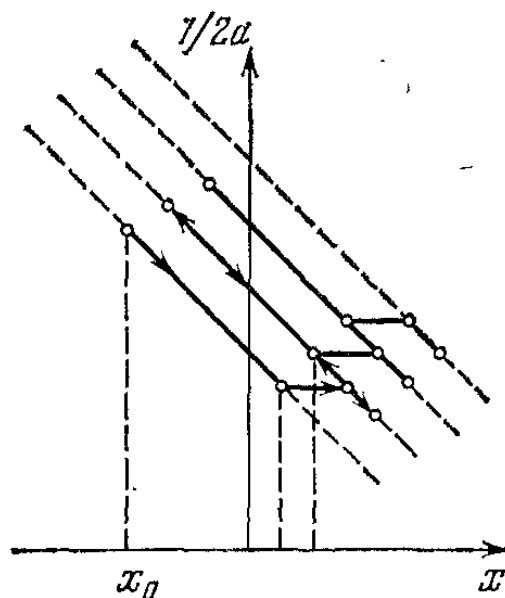


Рис. 3.25. Интерпретация эволюции траектории.

движение линии апсид сопровождается увеличением эксцентриситета. Отсюда следует, что *долгопериодическое увеличение эксцентриситета, обусловленное действием светового давления, сопровождается долгопериодическим уменьшением величины большой полуоси орбиты, вызванным влиянием земной тени.* Анализируя обратное движение спутника, точно так же обнаружим, что уменьшение эксцентриситета сопровождается увеличением большой полуоси орбиты, и приходим к следующей общей закономерности движения спутника Земли, подверженного влиянию светового давления и периодически входящего в тень Земли.

*Линия апсид орбиты спутника Земли долгопериодическим образом колеблется относительно направления Солнце — Земля. Удаление большой полуоси от этого направления сопровождается ее уменьшением и увеличением эксцентриситета; сближение большой полуоси с направлением Солнце — Земля сопровождается ее увеличением и уменьшением эксцентриситета.*

Связь между эксцентриситетом и большой полуосью была обнаружена американцем Меусом на наблюдательном материале о движении спутников серии «Эхо».

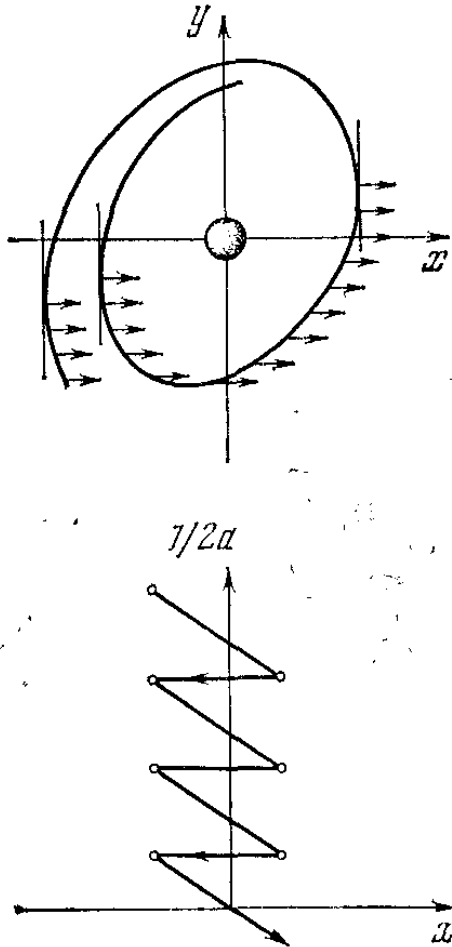


Рис. 3.26. Разгон спутника с периодическим включением ускорения.

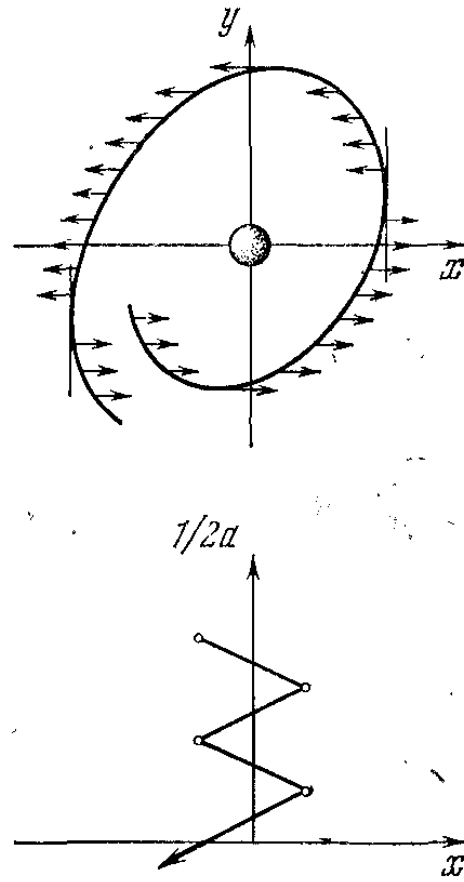


Рис. 3.27. Разгон спутника с периодическими переключениями ускорения.

Ю. А. Черников обосновал этот эффект теоретически. Мы здесь нашли простое качественное объяснение этого эффекта.

Заметим, что в принципе влияние тени может быть таким, что большая полуось увеличится до весьма существенных размеров, а может быть, и до бесконечно большого размера и спутник улетит от Земли в космическое пространство! По крайней мере теоретическая возможность этого не исключена. Стоит только рассмотреть последний чертеж (рис. 3.25) и проследить на нем эволюцию в обратном порядке. Такая эволюция приводит к переходу на все более и более низкие уровни энергии  $|h|$ , что соответствует увеличению большой полуоси. Только специальное исследование может показать, при каких условиях это увеличение будет бесконечно велико. На больших интервалах времени надо еще учитывать движение Солнца.

Отсылая читателя за информацией к уже упомянутым работам М. Д. Лидова [3.8], Ю. А. Черникова [3.7] и др., отметимся в заключение на одном вопросе. Как уже говорилось, ускорение  $f$  может быть «организовано» искусственным путем (реактивная сила от ионного или плазменного двигателя). Это значит, что мы можем его включать или выключать произвольно. Предыдущие расуждения достаточно ясно показывают, что можно эффективно «организовать» систематические включения и выключения малого реактивного ускорения (или даже систематические изменения его направления) таким образом, чтобы раскрутить спутник по спирали и выбросить его в космос за пределы поля земного тяготения. На рис. 3.26 и 3.27 приводятся такие траектории и соответствующие ситуации в плоскости  $\frac{1}{2a}$ ,  $x$ .

## ДВИЖЕНИЕ МИРОВ

Старый серый ослик Иа-Иа стоял один-одинешенек в заросшем чертополохом уголке леса... и думал о Серьезных Вещах. Иногда он грустно думал: «Почему?», а иногда: «По какой причине?», а иногда он думал даже так: «Какой же отсюда следует вывод?»

А. А. Милн

«Винни-Пух и все, все, все»

### 1. Еще раз о «Теореме Лалласа» и других Серьезных Вещах

Искусственный спутник, летающий вокруг Земли, подвержен, помимо всего прочего, притяжению Луны и Солнца. Действие этих возмущений на орбиту спутника оказалось несколько удивительным, даже в некоторой степени неожиданным... Но не будем забегать вперед в нашем изложении, ведь небесная механика двести лет только тем и занимается, что изучает движение светил под действием взаимных притяжений. Задача о движении спутника Земли может рассматриваться как частный случай «задачи  $n$  тел», о которой можно почерпнуть информацию у классиков небесной механики: им есть что сказать по этому поводу.

Классическая небесная механика рассматривает ситуацию, когда масса одного тела (Солнца!) существенно больше массы других взаимно тяготеющих тел; в первом приближении поэтому можно считать, что все тела (планеты) движутся вокруг Солнца по кеплеровским орбитам; вопрос состоит в том, как эволюционируют эти орбиты в силу взаимных притяжений планет. И вопрос вопросов: сохранится ли вечно нынешняя конфигурация Солнечной системы? Иначе говоря, устойчива ли Солнечная система? Не могут ли сильно измениться нынешние движения планет, не сойдут ли светила «со круги своя», не упадут ли друг на друга и на Солнце? И не улетят ли из родной Солнечной системы в бесконечность?

При этом мы сейчас имеем в виду устойчивость (или неустойчивость) под действием только сил взаимного ньютоновского тяготения планет. Планеты предполагаются материальными точками с массами, равными массам планет, как это принято в классической постановке «задачи  $n$  тел».

Итак, пусть имеется система  $n + 1$  взаимно притягивающихся по ньютоновскому закону точек  $M_s$  ( $s = 0, 1, 2, \dots, n$ ), каждая из которых имеет массу  $m_s$ . Будем считать, что масса  $m_0$  весьма велика по сравнению со всеми остальными массами, вместе взятыми. В Солнечной системе — это масса Солнца; в системе трех тел — Земля, Луна, искусственный спутник — это масса Земли.

В дальнейшем будем говорить для простоты о системе планеты — Солнце (если не оговорено другое).

Сделанное предположение никак не сказывается на точности уравнений движения, но позволяет в них выделить основную и возмущающую части.

Если за начало декартовой системы координат взять точку  $m_0$ , то уравнениями движения  $i$ -й точки (координаты которой суть  $x_i, y_i, z_i$ ) будут [4.1]

$$x_i = \frac{\partial U_i}{\partial x_i}, \quad y_i = \frac{\partial U_i}{\partial y_i}, \quad z_i = \frac{\partial U_i}{\partial z_i}, \quad (4.1.1)$$

где

$$U_i = \frac{f(m_0 + m_i)}{r_i} + U_i^*, \quad U_i^* = f \sum_{j=1}^n m_j \left( \frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j}{r_j^3} \right). \quad (4.1.2)$$

Здесь штрих у знака суммы означает, что при суммировании должен быть пропущен член, для которого  $j = i$ ;  $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$  — расстояние от  $i$ -й точки до точки  $M_0$ ,  $\Delta_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$  — расстояние между  $i$ -й и  $j$ -й точками. Если бы существовали только точки  $m_0$  и  $m_i$ , то движение точки  $m_i$  происходило бы относительно точки  $m_0$  по кеплеровской орбите, отвечающей силовой функции  $U_0 = \frac{f(m_0 + m_i)}{r_i}$ . Однако наличие других точек вносит возмущения в движение точки  $m_i$ . Эти возмущения описываются возмущающей частью  $U_i^*$  силовой функции  $U_i$ . Имея в виду для дальнейшего выражение (4.1.2) возмущающей функции  $U_i^*$ , перейдем, однако, к следующим важным преобразованиям.

Чтобы уравнения возмущенного движения планет приводились к удобному для исследования каноническому виду, приходится рассматривать специфическую систему координат для исследования движения каждой планеты  $M_s$  [4.1] — прямоугольную декартову систему координат  $x'_s, y'_s, z'_s$  с началом в центре масс  $G_{s-1}$  точек  $M_0, M_1, \dots, M_{s-1}$  и с неизменными направлениями осей. При этом в уравнениях движения фигурируют так называемые «приведенные массы»

$$m'_s = m_s \frac{(m_0 + m_1 + \dots + m_{s-1})}{(m_0 + m_1 + \dots + m_{s-1} + m_s)}. \quad (4.1.3)$$

Ясно, что в предположении о преимущественной величине массы  $m_0 \gg \sum_{i=1}^s m_i$  окажется, что  $m'_s \approx m_s$ . В Солнечной системе все точки  $G_{s-1}$  находятся внутри Солнца вблизи его центра. Центр масс системы Луна — Земля находится внутри Земли; при этом отношение массы Луны  $m_{\text{Л}}$  к массе Земли  $m_{\text{З}}$  составляет  $\frac{m_{\text{Л}}}{m_{\text{З}}} \approx \frac{1}{81}$ .

Рассмотрим полную силовую функцию  $U$  системы точек  $M_0, M_1, \dots, M_n$ :

$$U = f \sum_{s < j} \frac{m_s m_j}{\Delta_{sj}}. \quad (4.1.4)$$

Здесь  $\Delta_{sj}$  суть взаимные расстояния между точками. Силовую функцию (4.1.4) можно в новых координатах  $x'_s, y'_s, z'_s$  преобразовать к виду

$$U = f \sum_{j=1}^n \frac{m_0 m_j}{r'_j} + U', \quad (4.1.5)$$

где

$$r'_j = \sqrt{x_s'^2 + y_s'^2 + z_s'^2} \quad (r'_1 = \Delta_{01}).$$

В выражении (4.1.5) возмущающая функция  $U'$  имеет, конечно, другой вид, нежели возмущающая функция  $U_i^*$  (4.1.2), из-за новой системы координат (а также потому, что  $U_i^*$  относится к одной точке, а  $U'$  — ко всей системе).

Мы не будем явно выписывать выражение для  $U'$ , так как в дальнейшем нам понадобятся лишь некоторые ее общие свойства. Силовая функция  $U'$  имеет второй порядок малости относительно возмущающих масс [4.1].

Если ее отбросить в выражении (4.1.5), то окажется, что уравнения движения точки  $M_s$  не будут зависеть от координат любой другой точки  $M_j$ ,  $j \neq s$ , и точка  $M_s$  будет двигаться по кеплеровской орбите, которую относительно системы координат  $x'_s, y'_s, z'_s$  определим элементами

$$p_s, e_s, \omega_s, \Omega_s, i_s, \tau_s, \quad (4.1.6)$$

так что  $i_s$  — наклонение плоскости орбиты к плоскости  $x'_s, y'_s$  и т. д., как определялось в первом очерке.

Но вследствие взаимодействия масс будет работать возмущающая функция  $U'$ . Рассматривая возмущенное движение в оскулирующих элементах (4.1.6), обнаружим, что за счет  $U'$  они будут изменяться от своих постоянных невозмущенных значений. Для анализа этих изменений удобно ввести элементы Делоне аналогично тому, как они вводились в первом очерке:

$$\left. \begin{aligned} L_s &= \sqrt{\mu'_s a_s}, & l_s &= n_s (t - \tau_s), \\ G_s &= \sqrt{\mu'_s a_s (1 - e_s^2)}, & g_s &= \omega_s, \\ H_s &= \sqrt{\mu'_s a_s (1 - e_s^2)} \cos i_s, & h_s &= \Omega_s. \end{aligned} \right\} \quad (4.1.7)$$

Здесь  $\mu'_s = f(m_0 + m'_s)$ , где  $m'_s$  определяется формулой (4.1.3); среднее движение  $n_s = \sqrt{\mu'_s/a_s^3}$ , а большая полуось

$$a_s = \frac{p_s}{1 - e_s^2}. \quad (4.1.8)$$

Введем функцию Гамильтона

$$F = \sum_{s=1}^n \frac{\mu'_s{}^2}{2L_s^2} + U', \quad (4.1.9)$$

где, конечно, предполагается, что  $U'$  выражено через элементы Делоне. Тогда уравнения возмущенного движения принимают канонический вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL_s}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l_s}, & \frac{dG_s}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g_s}, & \frac{dH_s}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h_s}, \\ \frac{dl_s}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L_s}, & \frac{dg_s}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G_s}, & \frac{dh_s}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H_s} \end{aligned} \right\} \quad (4.1.10)$$

( $s = 1, 2, \dots, n$ ).

Это точные уравнения движения, и им отвечают некоторые точные первые интегралы. Известно, что задача

о движении системы и тяготеющих друг к другу точек имеет 10 первых классических интегралов. Так как силы в системе можно рассматривать как внутренние, то количество движения системы сохраняется (что дает три первых интеграла в компонентах по осям координат), центр масс системы движется равномерно и прямолинейно (еще три интеграла); сохраняется момент количества движения системы (еще три интеграла в компонентах по осям координат); наконец, десятый интеграл — интеграл энергии.

Интегралы, определяющие движение центра масс системы, мало интересны, но из оставшихся четырех первых интегралов можно извлечь определенную информацию о движении. В частности, оказывается, что для ограниченности движений необходимо (но не достаточно!), чтобы константа энергии была отрицательна (что мы далее и будем предполагать). Простое доказательство этого факта можно посмотреть, например, в книге Г. Н. Дубошина [4.1], которую мы, кстати сказать, широко используем и в настоящем очерке.

Из трех интегралов, описывающих сохранение момента количества движения, мы выпишем (и используем для анализа) в наших переменных один интеграл. Он имеет вид

$$\sum_{s=1}^n m'_s \sqrt{\mu'_s p_s} \cos i_s = c. \quad (4.1.11)$$

Напомним, что (4.1.11) — точный интеграл уравнений движения!

Далее, отметив, как и в первом очерке, что  $F$  является периодической функцией от  $l_s$ , представим  $F$  в виде  $n$ -кратного ряда Фурье:

$$= \bar{F} + \sum_{k_1, \dots, k_n} a_{k_1, \dots, k_n} \cos(k_1 l_1 + \dots + k_n l_n) + b_{k_1, \dots, k_n} \sin(k_1 l_1 + \dots + k_n l_n), \quad (4.1.12)$$

где

$$\bar{F} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} F dl_1 \dots dl_n, \quad (4.1.13)$$

а коэффициенты  $a_{k_1, \dots, k_n}$ ,  $b_{k_1, \dots, k_n}$  в (4.1.12) зависят от всех элементов (вообще говоря), кроме  $l_s$ ; при этом во всех членах под знаком суммы хотя бы один из  $k_i$



не равен нулю. Пусть ни при одном наборе целых (положительных или отрицательных) чисел

$$k_1, k_2, \dots, k_n \quad (4.1.14)$$

не выполняется условие резонанса  $\sum_{s=1}^{s=n} k_s n'_s = 0$ . Для всех чисел (4.1.14)

$$\sum_{s=1}^{s=n} k_s n'_s \neq 0. \quad (4.1.15)$$

Тогда уравнения первого приближения (в смысле асимптотических методов) получаются осреднением правых частей уравнений (4.1.10) или, что то же, гамильтоновой функции (4.1.12) по переменным  $l_s$ , независимо по каждой. Фактически это означает, что вместо гамильтоновой функции (4.1.9) следует взять ее среднее значение (4.1.13) и подставить в уравнения (4.1.10). Так как  $\bar{F}$  не зависит от  $l_s$  (по ним осреднили), то из (4.1.10) следует, что  $\frac{dL_s}{dt} = 0$  (ввиду  $\frac{\partial \bar{F}}{\partial l_s} = 0$ ), и тогда из определения  $L_s$  (4.1.7) следует, что большие полуоси всех орбит постоянны:

$$a_s = \text{const}. \quad (4.1.16)$$

Мы пришли к так называемой теореме Лапласа о «неизменности» (в смысле отсутствия вековых возмущений) больших полуосей планет Солнечной системы. Этот вывод справедлив, вообще говоря, на ограниченном интервале времени, так как только на ограниченном интервале времени «работает» первое приближение асимптотических методов. Точнее, мы можем утверждать, что  $|a_s - a_{s0}| \sim \sim \epsilon$  на  $t \sim 1/\epsilon$ , где малая величина  $\epsilon$  имеет порядок возмущений,  $a_{s0}$  — начальные значения больших полуосей.

Точные оценки сопряжены с существенными трудностями; от этих оценок зависит и ответ на вопрос, является ли движение рассматриваемой системы устойчивым на бесконечном интервале времени. Мы еще вернемся к этому вопросу (ведь из-за него и пишется этот очерк). А пока посмотрим, если (4.1.16) выполнено, то «какой же отсюда следует вывод?»

Обозначим

$$\sum_{s=1}^n m'_s \sqrt{\mu'_s a_s} = \varphi \quad (4.1.17)$$

и вычтем из (4.1.17) интеграл (4.1.11). Тогда, учитывая (4.1.8), найдем

$$\sum_{s=1}^n m'_s \sqrt{\mu'_s a_s} (1 - \sqrt{1 - e_s^2} \cos i_s) = \varphi - c,$$

или

$$\sum_{s=1}^n m'_s \sqrt{\mu'_s a_s} \frac{\sin^2 i_s + e_s^2 \cos^2 i_s}{1 + \sqrt{1 - e_s^2} \cos i_s} = \varphi - c. \quad (4.1.18)$$

Но если выполнено (4.1.16), то  $\varphi - c = c_0$  — новая постоянная, равная значению левой части равенства (4.1.18) в начальный момент времени. Ввиду положительности каждого члена левой суммы в (4.1.18) имеем  $c_0 > 0$  и каждый член суммы меньше, чем  $c_0$ . Отсюда — оценка

$$\frac{\sin^2 i_s + e_s^2 \cos^2 i_s}{1 + \sqrt{1 - e_s^2} \cos i_s} \leq \frac{c_0}{m'_s \sqrt{\mu'_s a_s}}. \quad (4.1.19)$$

То, что  $a_s$  не постоянно, но мало отличается от постоянной ( $|a_s - a_{s0}| \sim \varepsilon$ ), не нарушает оценки (4.1.19) — ее можно провести и с учетом этого обстоятельства.

Если начальные значения  $e_{s0}$ ,  $i_{s0}$  очень малы, то постоянная  $c_0$  также весьма мала; тогда из (4.1.19) следует, что и на всем рассматриваемом интервале времени величины  $e_s$ ,  $i_s$  останутся малыми.

Отсюда — «теорема Лапласа об устойчивости Солнечной системы»:

*Пусть орбиты планет, обращающихся в одном и том же направлении, близки к круговым, мало наклонены друг к другу, и пусть средние движения планет несоизмеримы. Тогда на достаточно большом интервале времени большие полуоси орбит останутся близкими к своим начальным значениям, а орбиты — близкими к круговым и мало наклоненными друг к другу.*

Эта теорема — замечательный результат классической небесной механики. Ведь планеты Солнечной системы движутся по почти круговым орбитам и почти в одной плоскости. Значит, по «теореме Лапласа об устойчивости», так и будет продолжаться достаточно долго. Столкновений планет можно пока не опасаться.

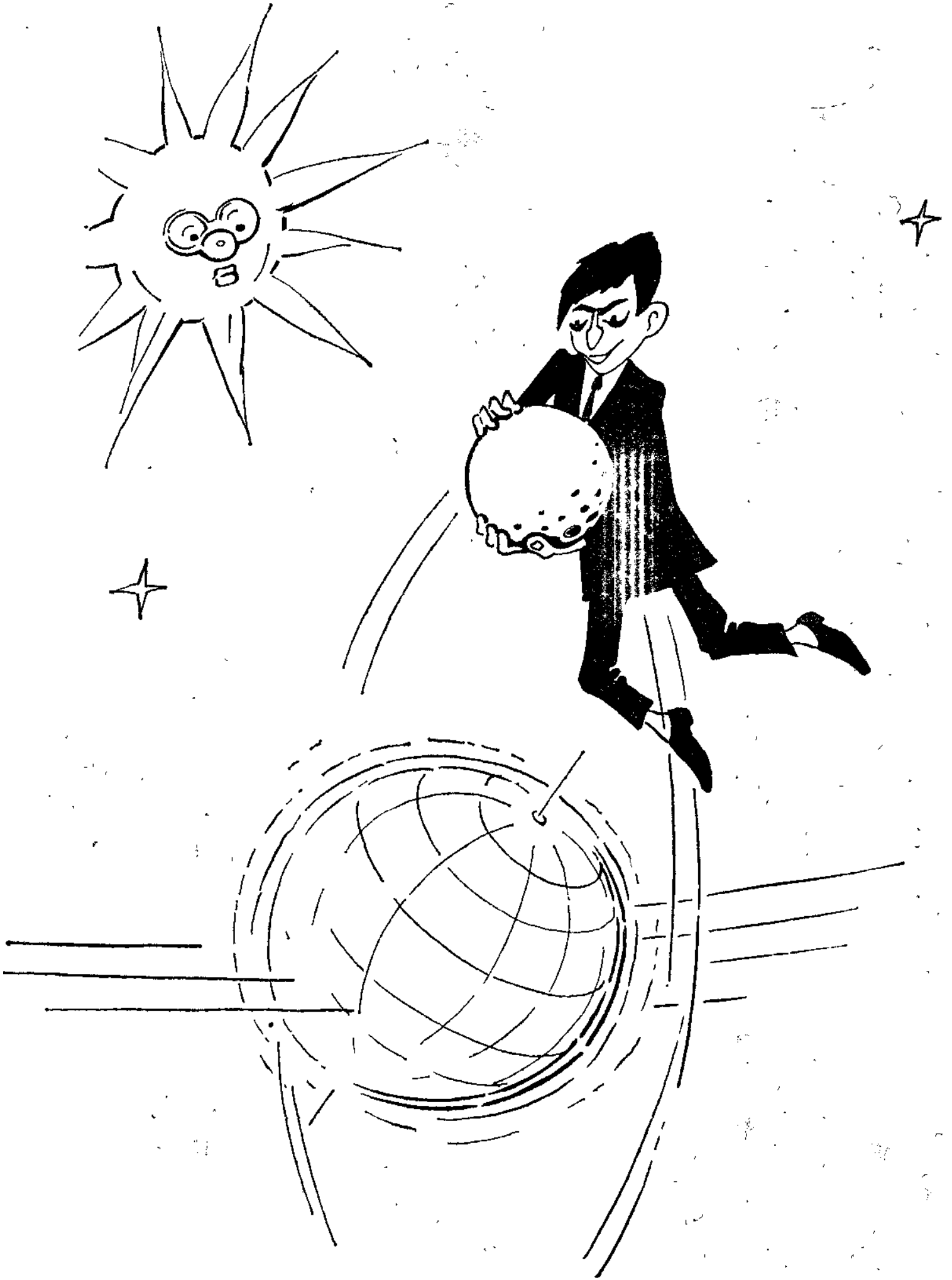
Заметим, что если в начальный момент все орбиты круговые и лежат в одной плоскости, то  $c_0 = 0$ , и из (4.1.19) следует, что все орбиты так и останутся круговыми и лежащими в одной плоскости. Плоская круговая система не эволюционирует.

Однако слова «теорема Лапласа об устойчивости системы» взяты в кавычки не зря. Что это за устойчивость до послезавтрашнего дня! (Или до последующего столетия — какая разница?) Нас интересует устойчивость в классическом смысле слова, устойчивость с точки зрения вечности! Верна ли «теорема Лапласа» на бесконечном интервале времени? На этот вопрос дан ответ совсем недавно трудами современных математиков, в первую очередь исследованиями советского математика В. И. Арнольда. Мы еще вернемся к ним чуть позже. А в заключение этого пункта опишем характер возмущенного движения планетной системы. К результатам, описанным в «теореме Лапласа», следует добавить еще такие сведения.

Пусть  $\mathbf{e}_k$  — вектор Лапласа  $k$ -й планеты (он направлен в перигелий орбиты по большой ее оси и пропорционален по величине эксцентриситету орбиты, а именно  $|\mathbf{e}_k| = \sqrt[4]{m_k^2 a_k e_k}$ ). Тогда анализ возмущенного движения показывает, что  $\mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_{ki}$ , где каждый вектор  $\mathbf{e}_{ki}$  равномерно вращается с частотой  $\nu_i^\omega$ .

Частоты  $\nu_i^\omega$  весьма малы. Таким образом, перигелии всех орбит медленно, но неуклонно («вековым образом») движутся в плоскостях своих орбит; их движение определяется набором  $n$  частот  $\nu_i^\omega$ , притом так, что вектор Лапласа каждой орбиты является суммой  $n$  равномерно вращающихся (с частотами  $\nu_i^\omega$ ) векторов. Далее, плоскость орбиты наклонена к основной координатной плоскости под углом  $i_k$ ; линия пересечения этих плоскостей называется *линией узлов*. Вековое изменение этих величин описывается вектором  $\mathbf{i}_k$ , направленным вдоль линии узлов, причем  $|\mathbf{i}_k| = \sqrt[4]{m_k^2 a_k i_k}$ . Этот вектор тоже является суммой равномерно вращающихся с медленными частотами  $\nu_i^\Omega$  векторов; но этих векторов уже  $n - 1$ .

Таково, приближенно, возмущенное движение системы  $n$  планет вокруг массивного центрального тела (Солнца). Планеты движутся по всегда малоэллиптическим и малонаклоненным орбитам, сохраняющим величины своих больших полуосей; плоскости орбит и сами орбиты своих плоскостях прецессируют вековым образом, причем скорости прецессий определяются описанной выше суперпозицией равномерных вращений. Такое движение называется *лагранжевым движением планет*.



## 2. Не хотите ли Луну уронить на Землю?

Самые удивительные эффекты в механике космического полета выявлены при исследовании задачи трех тел и многих тел, взаимно тяготеющих друг к другу.

Исследования движения планет и других тел Солнечной системы, которыми занималась классическая небесная механика, были, как правило, несколько утилитарны — приспособленными к случаю орбит, лежащих почти в одной плоскости и мало отличающихся от круговых. Такой подход, конечно, был оправдан запросами астрономической практики. Теорема Лапласа является отражением этого подхода. Большинство исследователей, занимавшихся классической небесной механикой, не проявляли достаточно пристального интереса к «экзотическим орбитам» — сильно наклоненным и сильно эллиптическим. С запуском первых космических аппаратов вспыхнул естественный интерес к исследованиям, не накладывающим никаких ограничений на форму и взаимное расположение орбит.

Обратимся, например, к задаче движения искусственного спутника Земли с учетом возмущений, вызванных Луной. Иначе говоря, рассмотрим задачу трех тел: «Земля, Луна, спутник». Ввиду крайней малости массы спутника по сравнению с массами Земли и Луны естественно считать, что Земля и Луна спутником совсем не притягиваются. Поэтому Земля и Луна (рассматриваемые как материальные точки) будут двигаться по невозмущенным кеплеровским орбитам относительно общего центра масс. Вопрос только в том, как возмущается орбита спутника при его движении относительно Земли. Такая постановка задачи называется *ограниченной*. Если спутник не подходит чересчур близко к Луне, то возмущения в его движении будут малы и применимы рассуждения предыдущего пункта этого очерка, из которых, в частности, следует, что большая полуось орбиты спутника в среднем не меняется:

$$a = \text{const.} \quad (4.2.1)$$

Рассмотрим теперь интеграл площадей (4.1.11), в котором останется в нашем случае всего два члена суммы, содержащей только элементы орбит Луны и спутника. Но Луна движется по невозмущенной орбите, значит, ее элементы  $p_L$ ,  $\cos i_L$  постоянны. Поэтому интеграл (4.1.11) свяжет только элементы спутника:

$$\sqrt{p} \cos i = \text{const.} \quad (4.2.2)$$

Возводя (4.2.2) в квадрат и учитывая (4.2.1) (а также (4.1.8)), получим

$$(1 - e^2) \cos^2 i = c, \quad (4.2.3)$$

где постоянная  $c$  определяется начальными значениями  $e_0$ ,  $\cos i_0$  элементов орбиты спутника. Заметим, что здесь угол  $i$  можно рассматривать как наклонение плоскости орбиты спутника к плоскости орбиты Луны.

Кроме интеграла (4.2.3) в осредненном движении, как это ясно из изложения, должен еще существовать интеграл

$$\bar{F} = \text{const} = h, \quad (4.2.4)$$

где  $\bar{F}$  определено формулой (4.1.13). Этот интеграл в рассматриваемом случае приводится к виду

$$e^2 \left( \frac{2}{5} - \sin^2 \omega \sin^2 i \right) = h_0. \quad (4.2.5)$$

Интеграл (4.2.5), после исключения  $e^2$  с помощью интеграла (4.2.3), приводится к виду

$$\sin^2 \omega = \frac{\cos^2 i (2 - 5h_0) - 2c}{(1 - \cos^2 i) (\cos^2 i - c)}. \quad (4.2.6)$$

По формуле (4.2.6) нетрудно построить зависимость  $\sin^2 \omega$  от  $\cos^2 i$  при фиксированных значениях  $c$  и для различных значений  $h_0$ . Возможные «портреты» этих зависимостей изображены (условно) на рис. 4.1, а и 4.1, б. Изображающая точка на плоскости  $(\sin^2 \omega, \cos^2 i)$  полностью проходит всю данную интегральную кривую, долгопериодическим образом колеблясь вдоль нее между предельно возможными значениями переменных. Отсюда ясно, что долгота перигея  $\omega$  может монотонно меняться, но может и колебаться в ограниченных пределах (обратим внимание на существование стационарной орбиты  $\omega = \text{const}$ ,  $i = \text{const}$ , и, следовательно,  $e = \text{const}$ ). Что касается угла  $i$ , то он всегда колеблется между двумя экстремальными своими значениями.

Рассмотрим теперь на плоскости  $(1 - e^2, \cos^2 i)$  картину интегральных кривых (4.2.3) при различных значениях постоянной  $c$  (то есть при различных начальных значениях  $e_0$ ,  $i_0$ ). Эта картина изображена на рис. 4.1, в. Область определения переменных:  $0 \leq 1 - e^2 \leq 1$ ,  $0 \leq \cos^2 i \leq 1$ . Кривые (4.2.3) представляют собой равнобочные гиперболы относительно переменных  $1 - e^2$ ,  $\cos^2 i$ . В процессе эволюции орбиты спутника его эксцентриситет  $e$  и наклонение  $i$  меняются так, что на плоскости  $(1 - e^2, \cos^2 i)$  изо-

бражающая точка колеблется по гиперболе, отвечающей значению константы

$$c = c_0 = (1 - e_0^2) \cos^2 i_0.$$

Анализ эволюционных уравнений и интеграла (4.2.6) показывает, что в реальном движении проходится не вся интегральная кривая (4.2.3), а только ограниченная ее дуга; пределы колебаний изображающей точки на рис. 4.1, *в* зависят от значения постоянной *h* интеграла

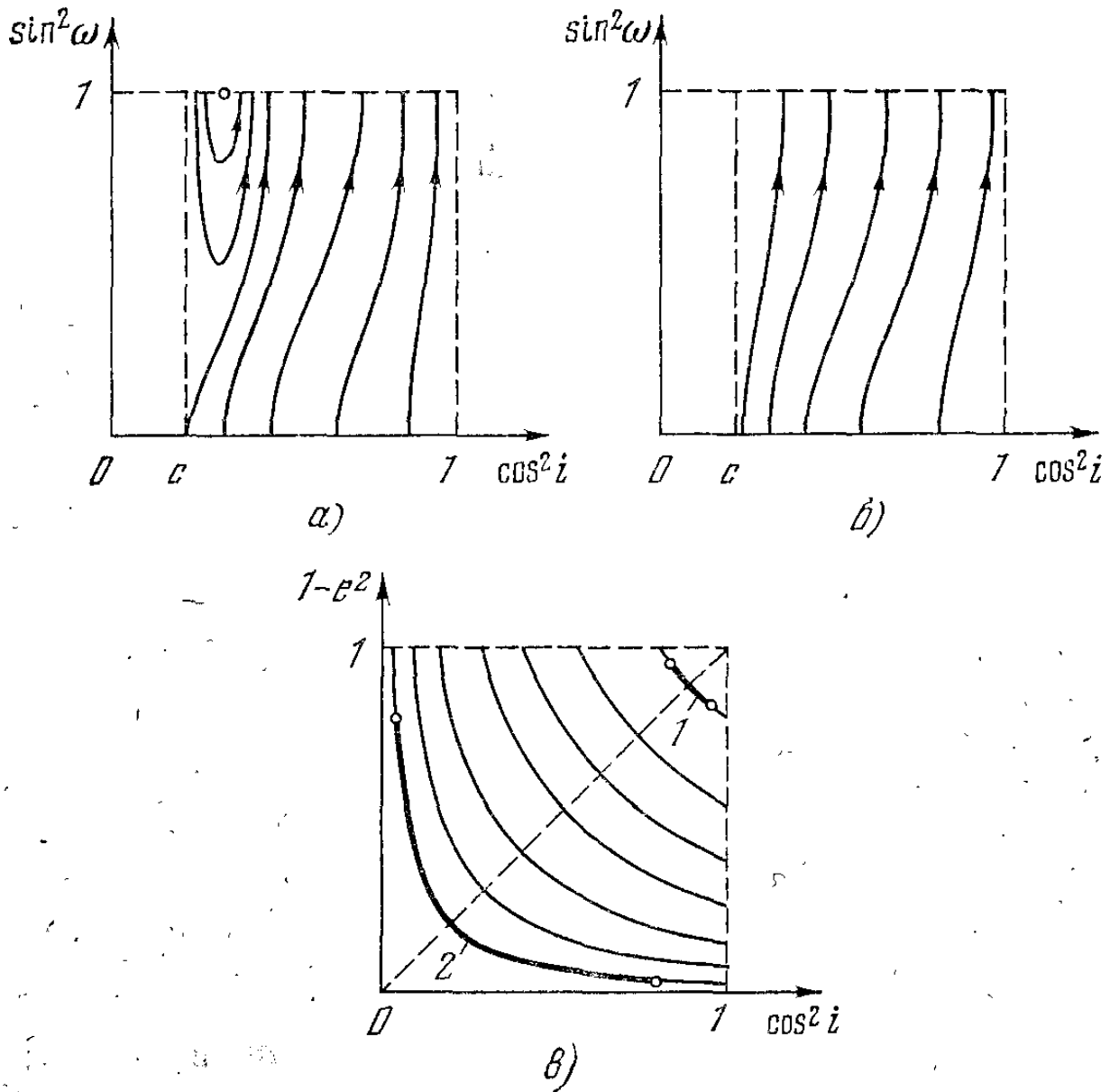


Рис. 4.1. Интегральные кривые эволюционных уравнений.

(4.2.4); однако эти пределы могут быть достаточно широки, так что в колебаниях изображающая точка проходит большую часть дуги интегральной кривой (4.2.3). На рис. 4.1, *в* пределы колебаний схематично отмечены светлыми точками, а участок реального движения — жирной линией.

Правый верхний угол на рис. 4.1, *в* соответствует орбитам с малым наклоном ( $i \approx 0$ ) и малым эксцентриситетом ( $e \approx 0$ ). Мы видим, что если в начальный момент орбита близка к круговой ( $e_0 \approx 0$ ) и мало наклонена к плоскости орбиты возмущающего тела ( $i_0 \approx 0$ ), то колебания величин  $e$  и  $i$  будут малы; орбита устойчива и всегда останется близкой к круговой и малонаклоненной — в полном соответствии с теоремой Лапласа (кривая 1 на рис. 4.1, *в*). В частности, плоская круговая орбита ( $e_0 = 0, i_0 = 0$ ) останется плоской и круговой. Впрочем,

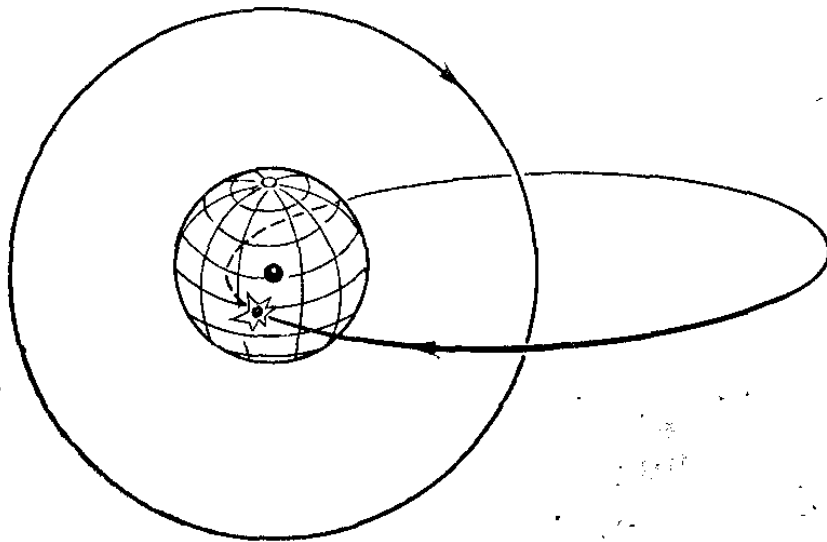


Рис. 4.2. Орбиты с разными эксцентриситетами.

для рассматриваемой задачи, как следует из интегралов (4.2.3), (4.2.5), в плоском случае ( $i \equiv 0$ ) остается неизменным произвольный эксцентриситет ( $e = e_0$ ). (В плоской задаче многих тел это, конечно, не так.)

Совсем другая картина эволюции движения получается при начальных наклонах, близких к  $\pi/2$ . Тогда даже первоначально круговая орбита стремится к очень сильно вытянутой (эксцентриситет стремится к величине, близкой к единице), так что  $(1 - e^2) \rightarrow \varepsilon \sim 0$ . Этой ситуации отвечает кривая 2 на рис. 4.1, *в*. Но при неизменной большой полуоси увеличение эксцентриситета может означать только то, что орбита сильно сжимается. На рис. 4.2 изображены орбиты спутника Земли с неизменной полуосью, но с разным эксцентриситетом. Нетрудно понять, что в процессе эволюции орбита спутника может сжаться настолько, что пройдет через поверхность Земли. Спутник после нескольких оборотов (или нескольких десятков оборотов) может упасть на Землю только за счет влияния притяжения Луны!



Хотя в классической небесной механике и более поздних исследованиях (Н. Д. Моисеев [4.2]) содержится материал, позволяющий прийти к такому выводу, однако только после запусков первых искусственных спутников к анализу эволюции произвольных орбит было привлечено широкое внимание.

Цикл работ в этом направлении выполнен М. Л. Лидовым, который, например, установил сроки существования

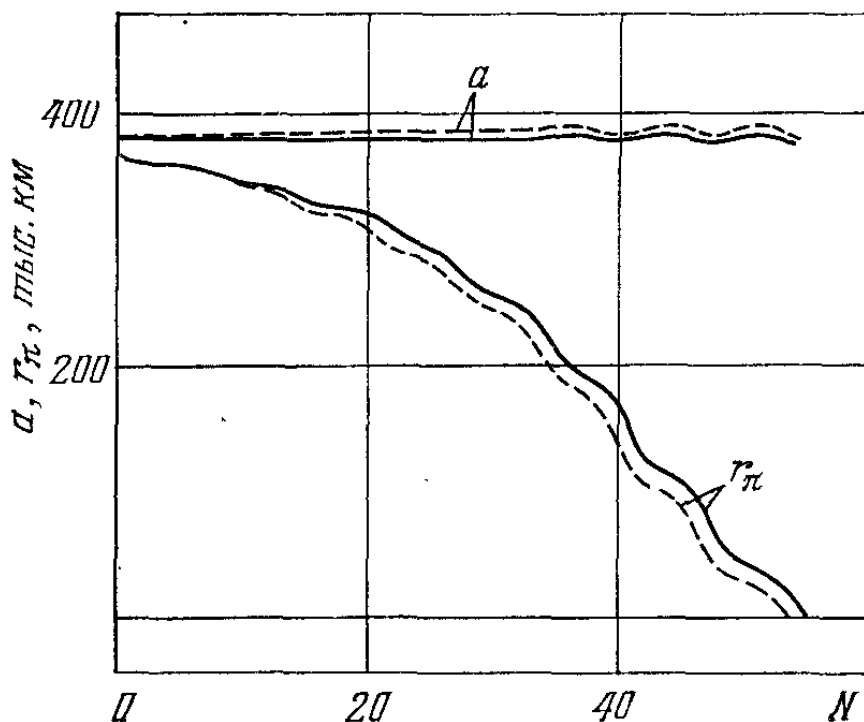


Рис. 4.3. Эволюция элементов «полярной Луны».

(«время жизни») спутников на сильно наклоненных орбитах и провел детальный анализ возмущенного движения. М. Л. Лидову принадлежит, в частности, следующий воистину убийственный по результатам и убедительности расчет [4.3, 4.4].

Рассмотрим систему трех тел: Солнце, Земля, Луна. Как известно, орбита Луны в ее движении вокруг Земли лежит почти точно в плоскости орбиты Земли в ее движении относительно Солнца (плоскость эклиптики). А что будет, если, ни в чем не меняя орбиту Луны, повернуть эту орбиту на  $90^\circ$  так, чтобы она была нормальна к плоскости орбиты Земли?

Читатель, конечно, уже предчувствует ответ: Луна свалится на Землю! И довольно быстро. М. Л. Лидов провел точный расчет (путем численного интегрирования уравнений движения на электронной быстродействующей вычислительной машине). Результаты этого расчета изображены на рис. 4.3, где в зависимости от числа  $N$  оборо-

тов «Луны» вокруг Земли приведены значения величины большой полуоси  $a$  и расстояния  $r_{\pi}$  перигея орбиты до центра Земли. Видно, что действительно большая полуось  $a$  примерно постоянна; зато  $r_{\pi}$  стремительно уменьшается, и всего за 55 оборотов  $r_{\pi}$  станет меньше радиуса Земли! Иначе говоря, на такой орбите Луна просуществовала бы всего около четырех с половиной лет! (Показательная оценка времени существования такой Луны, проведенная М. Л. Лидовым по осредненной теории: 52 оборота. Сравнивая эту оценку с точным значением времени существования, мы можем понять, что осредненные теории дают не только верные качественные результаты, но и правильные количественные оценки.)

Обнаружение возможности падения спутников на центральное тело за счет действия только гравитационных сил, безусловно, одно из самых интересных достижений механики. Еще несколько лет назад широкие круги исследователей плохо чувствовали эту возможность (если не чувствовали совсем). После запуска советского «Лунника», фотографировавшего обратную сторону Луны, автор присутствовал на публичной лекции уважаемого ученого, который заявил, что «Лунник» будет вечно летать по своей орбите (поскольку перигей орбиты высокий и атмосфера не тормозит движение). Это заявление было сделано за несколько дней до неизбежного падения «Лунника» на Землю: его орбита была наклонена примерно на  $90^\circ$  к плоскости эклиптики. Вскоре были опубликованы работы М. Л. Лидова [4.3, 4.4], где анализировались эволюционные эффекты взаимно тяготеющих тел и рассчитывался «феномен падения» тела на тело. Эти работы привлекли широкое внимание \*).

В свете сказанного становится ясно, что расположение большинства планет и спутников Солнечной системы примерно в одной плоскости — не случайно. Если и были тела с сильно наклоненными орбитами, то они давным-давно выпали на Солнце.

Правда, существуют спутники Урана с орбитами, сильно наклоненными к эклиптике. М. Л. Лидов показал [4.3], что возмущения от нецентральности поля тяготения Урана (то есть от его сжатия) устойчиво компенсируют возмущения от притяжения других тел. Таким образом,

---

\*) Прочтите обстоятельный обзор А. Ю. Ишлинского [4.17] о достижениях механики.

сильное сжатие Урана спасло его спутники от гибели. Из самого факта существования у спутников Урана устойчивых орбит, нормальных к плоскости эклиптики, можно вывести оценку величины сжатия Урана. Для других планет отношение возмущений от сжатия к возмущениям от внешних тел не настолько велико, чтобы препятствовать выпадению неэклиптических спутников на центральное тело.

Читатель, убедившийся в возможности падения на Землю Луны с «поставленной на ребро» орбиты, наверное тревожно задумался о судьбе настоящей Луны. По-видимому, оснований для тревоги нет — Луна будет летать вечно и достаточно спокойно. Это приближенно следует из «теоремы Лапласа» и точно — из исследований В. И. Арнольда, о которых речь еще впереди. Однако мы имеем в виду только силы взаимного тяготения «точечных масс»; в природе же действуют и иные силы. Так называемые «приливные силы», вызванные протяженностью и нежесткостью планет, способны убыстрить или замедлить их бег по орбитам и, как следствие, изменить эти орбиты; судьба Солнечной системы во многом зависит от этих сил. С учетом приливных сил заключение об устойчивости орбиты Луны уже не выглядит столь бесспорным. Об этом подробно и увлекательно рассказано в книге В. Г. Демина «Судьба Солнечной системы» [4.5]. Но для искусственных спутников Земли приливные силы имеют меньшую значимость, и мы не будем здесь на этом останавливаться специально.

### 3. Область маловозмущенного движения

Весь предыдущий анализ и заключения об эволюции справедливы, конечно, лишь при слабых возмущениях кеплеровского движения. Если в процессе эволюции спутник Земли подлетит чересчур близко к Луне, то возмущения от Луны будут столь сильными, что орбита резко «сломается» и эволюционные (то есть осредненные) уравнения перестанут работать. Поэтому все предыдущие заключения верны при условии, что спутник не попадает в некоторую окрестность возмущающего тела. Этому условию удовлетворяют, например, любые «внутренние» орбиты (спутник вращается вокруг Земли достаточно «глубоко» внутри орбиты Луны) или устойчивые «внешние» орбиты (орбита Луны — внутри орбиты спутника); неустойчивые внешние орбиты тоже могут не привести спутник

в близкую окрестность Луны (но могут и привести). Однако для внешних орбит более существенна роль возмущений от притяжения к Солнцу. Наличие устойчивых внешних орбит говорит в пользу упомянутой в первом очерке возможности существования устойчивых планетных систем у двойных звезд.

Определим несколько точнее, что имеется в виду под «окрестностью возмущающего тела», в которую не должен попадать спутник, если мы хотим, чтобы эволюционные уравнения не потеряли смысл.

Рассмотрим систему (рис. 4.4) материальных точек с массами  $m_0$  (Земля),  $m_1$  (Луна),  $m_2$  (спутник). Тогда

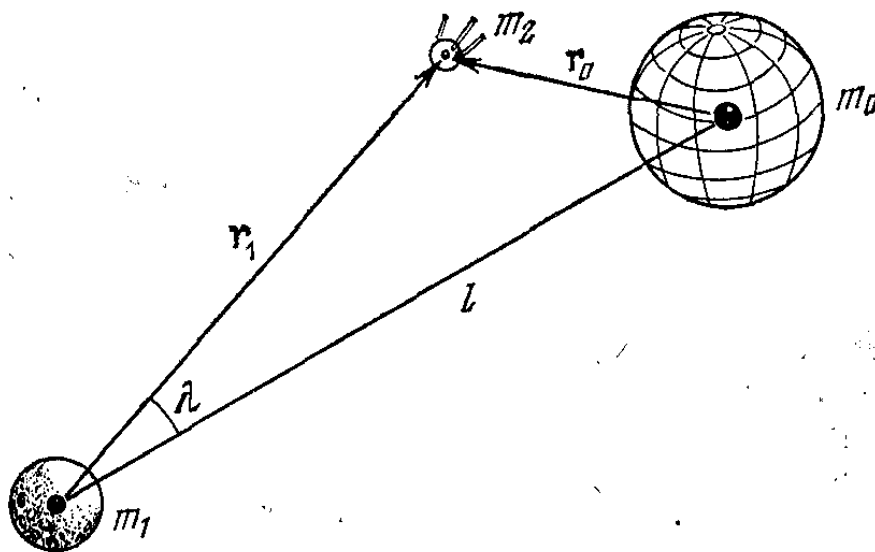


Рис. 4.4. Система трех точек  $m_0$ ,  $m_1$ ,  $m_2$ .

силовой функции (4.1.2) соответствует основное ускорение  $\mathbf{a}_0$  точки  $m_2$ , обусловленное притяжением Земли, и возмущающее ускорение  $\mathbf{f}_0$ , вызванное притяжением Луны:

$$\mathbf{a}_0 = -f \frac{m_0 + m_2}{r_0^3} \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{f}_0 = f m_1 \left( \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0}{l^3} - \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} \right). \quad (4.3.1)$$

Здесь  $\mathbf{r}_0$  — геоцентрический радиус-вектор спутника,  $\mathbf{r}_1$  — селеноцентрический радиус-вектор спутника,  $l$  — расстояние между Луной и Землей. Но то же движение спутника можно рассматривать и относительно Луны под действием основного  $\mathbf{a}_1$  и возмущающего  $\mathbf{f}_1$  ускорений:

$$\mathbf{a}_1 = -f \frac{m_1 + m_2}{r_1^3} \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{f}_1 = f m_0 \left( \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1}{l^3} - \frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3} \right). \quad (4.3.2)$$

Если величина

$$\epsilon_0 = \frac{|\mathbf{f}_0|}{|\mathbf{a}_0|} \quad (4.3.3)$$

достаточно мала, то движение близко к невозмущенному кеплеровскому движению вокруг Земли. Наоборот, если величина

$$\varepsilon_1 = \frac{|\mathbf{f}_1|}{|\mathbf{a}_1|} \quad (4.3.4)$$

достаточно мала, то движение близко к невозмущенному кеплеровскому движению в окрестности Луны. Отношение

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \quad (4.3.5)$$

будем принимать за меру близости движения к кеплеровскому движению вокруг Земли. С уменьшением  $\varepsilon_0$  растет  $\varepsilon_1$ , движение все более близко к движению вокруг Земли и все более далеко от движения вокруг Луны. Указанное изменение  $\varepsilon_0$  и  $\varepsilon_1$  ведет к уменьшению  $\varepsilon$ .

Рассмотрим теперь поверхность  $\varepsilon = \text{const}$ . Эта поверхность должна разбить пространство на области, «разрешенную» и «запрещенную» для применения эволюционных уравнений; «запрещенная» область должна охватывать окрестность Луны, а в «разрешенной» области эволюционные уравнения описывают движение (согласно общим принципам асимптотических методов) с точностью порядка  $\varepsilon$  на интервале времени порядка  $1/\varepsilon$ . Будем называть такую поверхность « $\varepsilon$ -поверхностью».

Возведем (4.3.5) в квадрат и, сделав некоторые простые преобразования, получим (пренебрегая еще массой  $m_2$  очень малой по сравнению с  $m_0$  и  $m_1$ )

$$\begin{aligned} m_1^4 r_0^4 \left( \frac{1}{l^4} + \frac{1}{r_1^4} - \frac{2}{l^2 r_1^2} \cos \lambda \right) = \\ = \varepsilon^2 m_0^4 r_1^4 \left[ \frac{1}{l^4} + \frac{1}{r_0^4} + \frac{2(lr_1 \cos \lambda - l^2)}{l^3 r_0^3} \right], \quad (4.3.6) \end{aligned}$$

где  $\lambda$  — угол между направлениями Луна — Земля и Луна — спутник (рис. 4.4), а

$$r_0^2 = l^2 + r_1^2 - 2r_1 l \cos \lambda. \quad (4.3.7)$$

Формулы (4.3.6), (4.3.7) дают  $\varepsilon$ -поверхность  $r_1(\lambda)$ .

Эту сложную формулу (4.3.6) легко упростить. Естественно ожидать, что  $\varepsilon$ -поверхность ограничивает около Луны область малого (по сравнению с расстоянием Луна — Земля) размера, так что  $r_1/l$  мало. Приведем (4.3.6) к общему знаменателю и разложим по степеням  $r_1/l$ . Сохраним

только члены разложения с самой низкой степенью  $r_1/l$ .  
Получим

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \left( \frac{m_1}{m_0} \right)^4 = \left( \frac{r_1}{l} \right)^{10} (1 + 3 \cos^2 \lambda). \quad (4.3.8)$$

Эта поверхность вращения не очень сильно отличается от сферы. В самом деле, при  $\cos \lambda = 0$   $r_1 = r_1^{\max}$ , при  $\cos^2 \lambda = 1$   $r_1 = r_1^{\min}$ , причем отношение максимального размера  $r_1^{\max}$  поверхности к ее минимальному размеру  $r_1^{\min}$  составляет  $\sqrt[5]{2} \approx 1,15$ . Поэтому в качестве  $\varepsilon$ -поверхности возьмем сферу

$$r_1 = l \left( \frac{m_1}{m_0} \right)^{2/5} \frac{1}{\sqrt[5]{\varepsilon}}. \quad (4.3.9)$$

Итак, если траектория нашего спутника не попадает в процессе своей эволюции в окрестность Луны, ограниченную сферой (4.3.9), то наши эволюционные (осредненные) уравнения будут давать решение, отличающееся от истинного на величину порядка  $\varepsilon$ , притом на большом интервале времени (вообще говоря, порядка  $1/\varepsilon$  \*).

При  $\varepsilon = 1$  уравнение (4.3.9) дает сферу, широко используемую в механике космического полета и называемую *сферой действия* [4.6]. Если спутник попал в сферу действия Луны, то его уже следует рассматривать как спутник Луны (пока он не выйдет из ее сферы действия). Вне этой сферы спутник, действительно, можно рассматривать как спутник Земли.

Мы говорим о системе Луна — Земля для определенности. Но можно рассматривать и другие системы, например систему Земля — Солнце. Тогда формула (4.3.9) определит  $\varepsilon$ -сферу (и сферу действия при  $\varepsilon = 1$ ) Земли относительно Солнца. В следующей таблице приводятся размеры радиуса  $r_1$   $\varepsilon$ -сфер и сфер действия Луны (относительно Земли) и Земли (относительно Солнца):

	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 0,1$	$\varepsilon = 0,01$	$\varepsilon = 0,001$
Луна	66 280 км	105 050 км	166 360 км	263 790 км
Земля	924 820 км	583 490 км	368 460 км	232 370 км

\*) Из дальнейшего будет ясно, что этот интервал времени может быть и неограниченным при конечном  $\varepsilon$ .

В этой таблице радиусы  $\varepsilon$ -сферы вычислены для спутника Земли, возмущаемого либо Луной (первая строка), либо Солнцем (вторая строка). Поэтому с уменьшением  $\varepsilon$  радиусы в первой строке растут (растет запретная зона вокруг Луны), а во второй строке уменьшаются (уменьшается разрешенная зона вокруг Земли). Для расчета

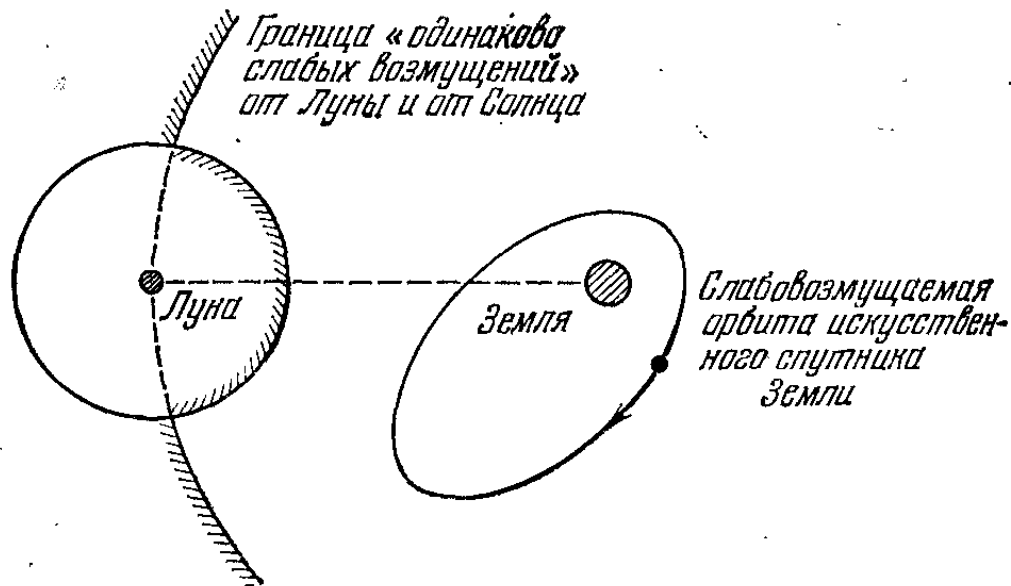


Рис. 4.5. Область слабовозмущенного движения.

второй строки в формуле (4.3.9) надо, естественно, брать не  $\varepsilon$ , а  $\varepsilon^{-1}$ . Интересно отметить, что для  $\varepsilon = 0,1$  существует разрешенная область, охватывающая и Луну и Землю, где могут существовать орбиты спутников Земли, одинаково «не сильно» ( $\varepsilon \sim 0,1$ ) возмущаемые и Луной и Солнцем. Для  $\varepsilon = 0,01$  нет слабовозмущаемых «внешних» орбит, охватывающих и Луну и Землю (рис. 4.5).

Необходимые для расчета предыдущей таблицы значения параметров взяты следующими:

	$m_0/m_1$	$l$
Луна (относительно Земли)	81,35	384 300 км
Земля (относительно Солнца)	332 400	149 598 500 км

Заметим, что в механике космического полета используются также гравитационные сферы, определенные и из других соображений [4.7].

Понятие сферы действия нам еще понадобится для анализа траекторий окололунных перелетов.

#### 4. Устойчивость Солнечной системы

Все предыдущие выводы об устойчивости планетных орбит и их эволюции были сделаны нами на основе неточных, осредненных, эволюционных уравнений и поэтому не могут дать строгого ответа об устойчивости на бесконечном интервале времени.

Напомним, что, когда мы ставим вопрос об «устойчивости Солнечной системы», имеется в виду математическая проблема устойчивости траекторий в задаче  $n$  материальных взаимно притягивающихся по ньютоновскому закону точек; масса одной из них (Солнца) существенно больше масс других точек. Никакие другие силы, кроме силы ньютоновского взаимного притяжения, не рассматриваются.

В этой постановке задача в течение двух веков была предметом исследований ряда выдающихся математиков, но их усилия не приводили к цели.

Но в 1961 году молодой советский математик В. И. Арнольд уже докладывал о своих фундаментальных результатах, являющихся крупнейшим шагом к решению этой проблемы. Эти результаты, основанные на ряде идей академика А. Н. Колмогорова, носят общий характер анализа поведения решений канонических систем. Заключение о поведении Солнечной системы вытекают отсюда как частный случай.

Рассмотрим каноническую систему с гамильтонианом

$$H(p, q) = H_0(p) + \varepsilon H_1(p, q, \varepsilon),$$

где  $p, q$  —  $n$ -мерные векторы,  $\varepsilon$  мало,  $H_1$  периодически по  $q$  с периодом  $2\pi$ . Если  $\varepsilon = 0$ , то движение определяется из уравнений

$$\dot{p} = 0, \quad \dot{q} = \omega(p),$$

где  $\omega(p) = \frac{\partial H_0}{\partial p} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$  и представимо на  $n$ -мерном торе  $p = \text{const}$  «обмоткой»  $q(t)$  этого тора.

Для двумерного случая ситуация изображена на рис. 4.6. На двумерном торе («баранке») отложена долгота  $q_1$  и широта  $q_2$ . Равномерное одновременное изменение  $q_1$  со скоростью  $\omega_1$  и  $q_2$  со скоростью  $\omega_2$  дают траекторию, обматывающую тор, как можно показать, всюду плотно \*),

---

\*) Это значит, что движущаяся точка рано или поздно окажется внутри любой сколь угодно малой области на торе.



если  $\omega_1$  и  $\omega_2$  несоизмеримы. Такое движение называют *условно-периодическим*. Если же  $\omega_1/\omega_2 = m/n$ , где  $m$  и  $n$  — целые числа, то через время  $t = 2\pi m/\omega_1 = 2\pi n/\omega_2$  траектория замкнется. В этом случае движение периодически. Так же в  $n$ -мерном случае при  $\omega_1 k_1 + \dots + \omega_n k_n = 0$ , где  $k_i$  — целые числа и по крайней мере два из них не равны нулю, траектория будет периодичной, замкнутой на  $n$ -мерном торе, а если  $\omega_1 k_1 + \dots + \omega_n k_n \neq 0$ , то движение будет условно-периодическим, траектория  $q_i(t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) всюду плотно заполняет  $n$ -мерный тор  $p_i = \text{const}$ .

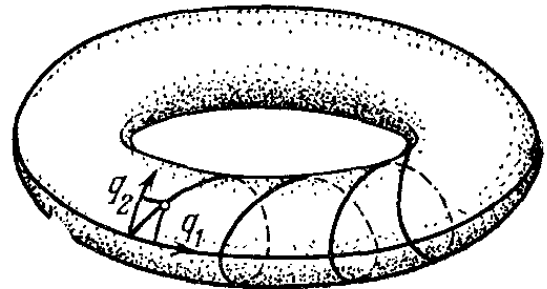


Рис. 4.6. Тор условно-периодического невозмущенного движения.

Подключим теперь «возмущающую часть»  $\varepsilon H_1$  гамильтониана  $H$ . Пусть  $\varepsilon$  достаточно мало. Можем ли мы утверждать, что движение останется близким к исходному условно-периодическому или периодическому движению? Иначе говоря, сохраняются или разрушаются исходные торы невозмущенного движения?

Если исходные торы не разрушаются, а лишь «слегка деформируются», то возмущенное движение вечно близко к невозмущенному. В возмущенном движении ( $\varepsilon \neq 0$ )  $p_i \neq \text{const}$  («деформированный тор»), но  $p_i$  близки к  $p_i^0 = \text{const}$  («недеформированный тор»), отвечающим невозмущенному ( $\varepsilon = 0$ ) движению. Чтобы убедиться в малом отличии траекторий возмущенного движения от траекторий невозмущенного, достаточно (всего лишь!) построить в окрестности невозмущенного движения сходящиеся при малом  $\varepsilon$  ряды, описывающие возмущенное движение. Над этим «всего лишь» и бились двести лет различные математики, но «испечь» эту баранку (тор возмущенного движения) удалось лишь В. И. Арнольду.

Следуя идее А. Н. Колмогорова, В. И. Арнольд построил последовательные приближения типа «метода Ньютона» (аналог метода касательных в нахождении корней алгебраических уравнений). Этот метод в  $k$ -м приближении дает ошибку порядка  $\varepsilon^{2k}$ , что при  $k \rightarrow \infty$  обеспечивает быструю сходимость. При практическом построении доказательств В. И. Арнольду пришлось преодолеть ряд серьезных трудностей. Назовем некоторые из них.

1. *Резонансность.* Если в невозмущенном движении  $\sum k_i \omega_i = 0$ , то в возмущенном движении траектории, вообще говоря, могут не лежать на торе. Тор разрушается. Сходящиеся ряды, описывающие возмущенное движение, если и можно построить, то не во всем фазовом пространстве, а лишь в некоторых его «слоях». А именно, как оказалось, в окрестностях невозмущенных торов с условно-периодическими (но не периодическими!) движениями.

Вторая трудность, вызванная резонансностью, состоит в том, что ряды, описывающие возмущенное движение, содержат знаменатели вида  $\sum k_i \omega_i$ , которые малы, если частоты близки к резонансным. Малость знаменателей препятствует сходимости рядов. Эти трудности обойдены в теореме А. Н. Колмогорова, полное доказательство которой проведено В. И. Арнольдом [4.8]. Сходимость ньютоновского типа ( $\varepsilon^{2h}$ ) «забывает» злое влияние малых знаменателей.

Однако применение результатов анализа гамильтоновых систем к задаче устойчивости планетных орбит встречает еще ряд трудностей, преодоленных В. И. Арнольдом в процессе доказательства его теоремы, развивающей теорему А. Н. Колмогорова. Отметим эти трудности.

2. *Собственное вырождение.* Под этим термином подразумевается тот факт, что количество частот в возмущенном движении может быть больше, чем в невозмущенном. Вспомним, что «лагранжево движение планет» содержит больше частот, чем кеплеровское движение: кроме быстрых «частот» кеплеровских движений планет по орбитам имеются медленные «частоты» прецессий перигелиев планет и восходящих узлов их орбит.

Путь к преодолению этой трудности — рассматривать в качестве невозмущенного «новое» движение (например, вместо кеплеровского более точное лагранжево движение).

3. *Предельное вырождение.* Этот термин подразумевает следующее. Среди  $n$ -мерных торов  $p = \text{const}$  невозмущенного движения могут встретиться торы размерности  $k < n$ , например положение равновесия ( $k = 0$ ) и одночастотное периодическое движение ( $k = 1$ ). В

В результате большой и тяжелой работы В. И. Арнольд строго и последовательно пришел к теореме [4.9], суть которой заключается в следующем:

*Возмущенное движение, описываемое гамильтоновой системой, для большинства начальных данных является*

условно-периодическим, вечно близким к соответствующе подобранному «невозмущенному» условно-периодическому движению.

Существенная оговорка «для большинства начальных данных» подразумевает, что в возмущенном движении сохраняются любые торы невозмущенного движения, кроме может быть, торов с резонансными частотами вместе с малой их окрестностью. Эти последние торы в возмущенном движении, вообще говоря, разрушаются. Общая картина возмущенного движения может быть представлена в виде условно-периодических движений по сохранившимся (слегка деформированным) торам, щели между которыми заполнены остатками разрушенных торов (рис. 4.7).

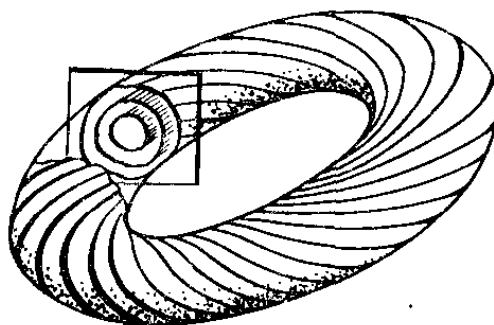
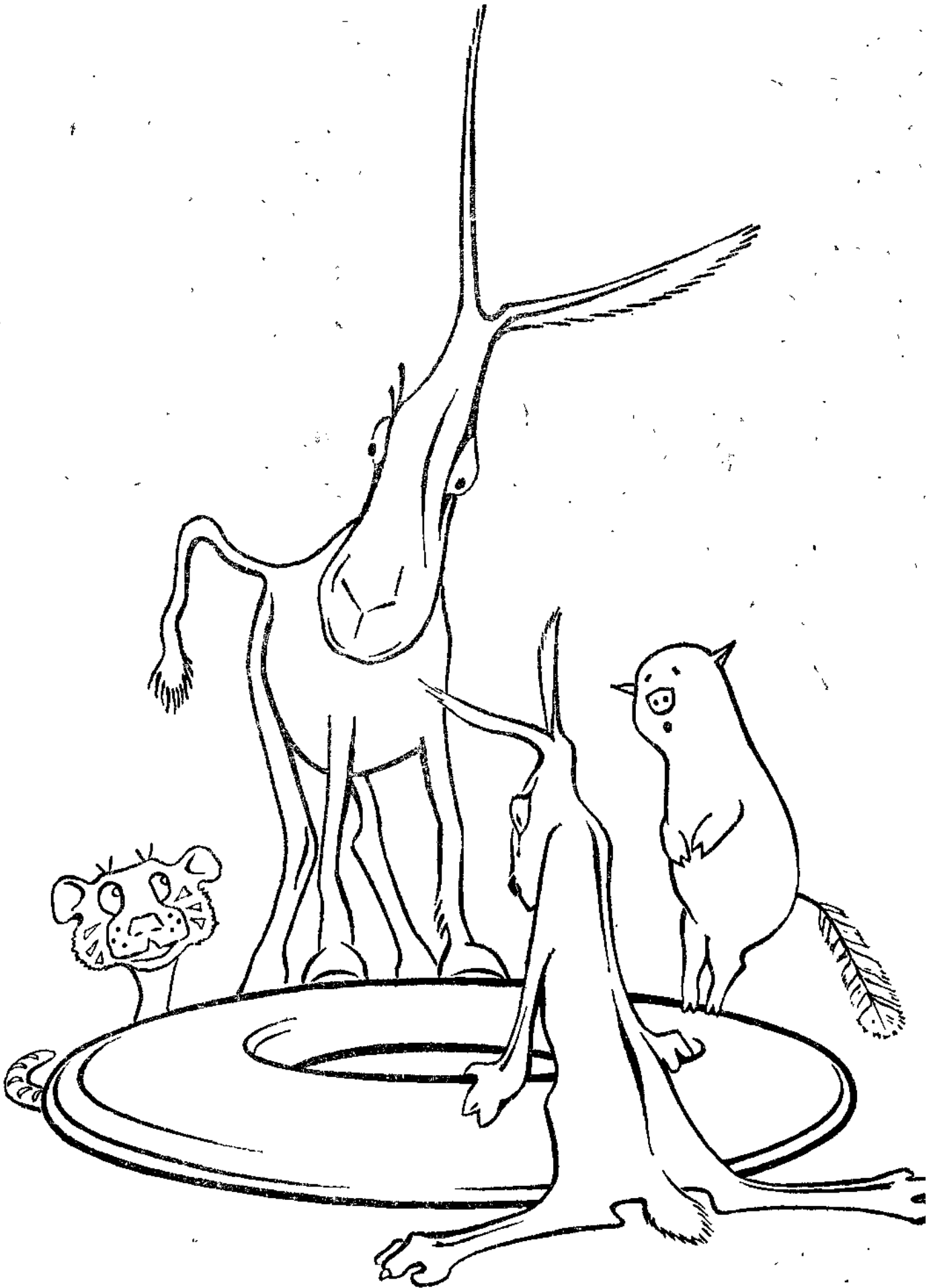


Рис. 4.7. Торы условно-периодических возмущенных движений.

О поведении траекторий в этих «щелях» мало что известно. Если задача — с двумя степенями свободы, то интеграл энергии  $H = \text{const}$  дает трехмерное многообразие, которое делят торы условно-периодических движений (рис. 4.7), и траекториям из щелей между этими торами некуда деться (пересечь торы условно-периодических движений они не могут в силу однозначной зависимости движений от начальных данных). А так как ширина щели мала вместе с  $\varepsilon$ , то в системах с двумя степенями свободы можно говорить об устойчивости даже и резонансных движений. В системах с большим числом степеней свободы размерность торов условно-периодических движений по крайней мере на две единицы меньше размерности фазового пространства. Эти торы не делят пространства и похожи на сколь угодно густо растущий сосновый лес, в котором белка, спустившаяся на землю, может сколь угодно долго бегать меж трех сосен (устойчивость), но может меж сосен и убежать сколь угодно далеко (неустойчивость). Другая белка тем временем бегаёт по стволу одной и той же сосны в условно-периодическом движении, устойчивом даже при сильном ветре \*).

\*) См. также работу Н. П. Нехорошева «О поведении гамильтоновых систем, близких к интегрируемым» (Функциональный анализ, 1971, № 4).



Приложением теоремы Арнольда является следующий сильный результат. Пусть массы планет достаточно малы по сравнению с массой центрального светила (Солнца). Тогда, если эксцентриситеты и наклоны орбит достаточно малы, то для большинства начальных условий истинные движения планет условно-периодичны и вечно близки к соответствующе подобранным лагранжевым движениям. При этом эксцентриситеты и наклоны вечно останутся малыми, а большие полуоси орбит вечно будут близки к своим начальным значениям. Иначе говоря, «теорема Лапласа» верна на бесконечном интервале времени.

Так как мы ранее получали «теорему Лапласа» методом осреднения, то можем заключить, что имеются случаи (да какие!), когда метод осреднения дает картину движения, близкую к истинной, на всем бесконечном интервале времени.

То «большинство начальных условий», о которых говорится выше, повторяем, *исключает резонансные соотношения между частотами движений.*

Результаты В. И. Арнольда трудно переоценить. Они достигнуты благодаря синтезу глубоких идей с изнурительным трудом при их осуществлении. Только формулировки отдельных лемм и теорем занимают целые страницы его работ. Сам Арнольд по этому поводу употребляет довольно сильные выражения, например: «...Мы будем пользоваться устрашающим формальным аппаратом динамики» ([4.9], стр. 94) \*).

Решение проблем, насчитывающих двухвековую историю, конечно, не может даваться легко. Существенный вклад в это дело внесли замечательные математики нашего века — А. Пуанкаре, Дж. Д. Биркгоф, А. Н. Колмогоров, К. Л. Зигель, Ю. Мозер. Теоремы Арнольда — Колмогорова нанесли один из завершающих ударов в решении проблемы устойчивости движений системы гравитирующих тел.

Остается, однако, задача о применимости этих результатов в каждом конкретном случае, например в случае нашей конкретной Солнечной системы.

---

\*) «Иа-Иа, старый серый ослик, однажды стоял на берегу ручья и понуро смотрел в воду на свое отражение.

— Душераздирающее зрелище, — сказал он накопец. — Вот как это называется — душераздирающее зрелище».

А. А. Милн. «Винни-Пух и все, все, все».

## 5. Не резонансна ли Солнечная система?

Трудности со сходимостью рядов, описывающих возмущенное движение в небесной механике, возникли в значительной степени потому, что среди частот есть приближенно соизмеримые. Так, например, если среднее движение (частоту)  $\omega_{\text{Юп}}$  обращения Юпитера вокруг Солнца принять за 1, то среднее движение (частота)  $\omega_{\text{Сат}}$  обращения Сатурна будет равно 0,4027, откуда

$$2\omega_{\text{Юп}} - 5\omega_{\text{Сат}} = -0,0135. \quad (4.5.1)$$

Видна приближенная соизмеримость (резонанс  $\omega_{\text{Юп}}/\omega_{\text{Сат}} = 5/2$ ) движений Юпитера и Сатурна.

Удивительную гипотезу выдвинул А. М. Молчанов. В процессе эволюции, справедливо считает он, надо учитывать малые диссипативные (то есть рассеивающие энергию) силы. В Солнечной системе это могут быть приливные силы, тормозящие силы от межпланетной пылевой материи и другие, может быть даже неизвестные нам еще, диссипативные силы.

Мы знаем, что возмущения за счет взаимодействия планет очень малы. Диссипативные силы на порядки меньше даже этих малых возмущений. Но, действуя миллиарды лет, диссипативные силы систематически меняют орбиты и приводят движение планет к каким-то стационарным орбитам — практически неизменным в последующие миллиарды лет.

Пока мы не сказали ничего оригинального. «Все это давно известно». Оригинальное же состоит в том, что, по гипотезе Молчанова, *эти стационарные орбиты должны быть резонансны!* «Эволюционно зрелые колебательные системы неизбежно резонансны, а их строение задается набором целых чисел», — пишет А. М. Молчанов. В частности, А. М. Молчанов выдвинул гипотезу *полной резонансности Солнечной системы*: частоты (средние движения) обращения планет ненамного отличаются от таких частот, для которых А. М. Молчанов нашел *полную систему резонансов* — девять резонансных соотношений для девяти известных больших планет. Более того, аналогичные резонансы он обнаружил для некоторых из спутников планет. Соответствующие таблицы опубликованы им в «Икарусе» — международном журнале проблем Солнечной системы [4.10]. Оттуда мы и заимствуем нижеследующие таблицы.

## Резонансные соотношения в Солнечной системе

	Планета	$\omega_i^H$	$\omega_i^T$	$\Delta\omega/\omega$	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$n_5$	$n_6$	$n_7$	$n_8$	$n_9$
1	Меркурий . . . . .	49,22	49,20	0,0004	1	-1	-2	-1	0	0	0	0	0
2	Венера . . . . .	19,29	19,26	0,0015	0	1	0	-3	0	-1	0	0	0
3	Земля . . . . .	11,862	11,828	0,0031	0	0	1	-2	1	-1	1	0	0
4	Марс . . . . .	6,306	6,287	0,0031	0	0	0	1	-6	0	-2	0	0
5	Юпитер . . . . .	1,000	1,000	0,0000	0	0	0	0	2	-5	0	0	0
6	Сатурн . . . . .	0,4027	0,400	0,0068	0	0	0	0	1	0	-7	0	0
7	Уран . . . . .	0,14119	0,14286	-0,0118	0	0	0	0	0	0	1	-2	0
8	Нептун . . . . .	0,07197	0,07143	0,0075	0	0	0	0	0	0	1	0	-3
9	Плутон . . . . .	0,04750	0,04762	-0,0025	0	0	0	0	0	1	0	-5	1

Таблица 4.1 содержит целые числа  $n_i$  — положительные, отрицательные и нули — такие, что

$$\sum_{i=1}^{i=9} n_i \omega_i = 0,$$

где  $\omega_i$  — частоты (средние движения) обращения больших планет Солнечной системы. При этом в качестве  $\omega_i$  берутся некоторые «теоретические» значения  $\omega_i^T$  частот, в точности удовлетворяющие резонансным соотношениям

$$\sum_i n_i \omega_i = 0;$$

но рядом приводятся фактически наблюдаемые значения  $\omega_i^H$  частот соответствующих планет и показаны отношения

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\omega_i^H - \omega_i^T}{\omega_i^H},$$

описывающие отклонения фактических частот от резонансных. Эти отклонения малы!

Аналогичные таблицы приводятся и для систем спутников Юпитера, Сатурна, Урана (таблица 4.2).

Эти таблицы производят достаточно убедительное впечатление. Отклонение истинных частот от резонансных не превосходит в худшем случае 1,5%. В резонансах друг

ТАБЛИЦА 4.2

**Резонансные соотношения в системах спутников планет**

**Спутники Юпитера**

	Спутник	$\omega_i^H$	$\omega_i^T$	$\Delta\omega/\omega$	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$
1	Ио . . . . .	4,044	4,000	0,0110	1	-2	0	0
2	Европа . . . . .	2,015	2,000	0,0075	0	1	-2	0
3	Ганимед . . . . .	1,000	1,000	0,0000	0	0	-3	7
4	Каллисто . . . . .	0,4288	0,4285	0,0008	0	0	-1	2



### Спутники Сатурна

	Спутник	$\omega_i^H$	$\omega_i^T$	$\Delta\omega/\omega$	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$n_5$	$n_6$	$n_7$	$n_8$
1	Минас . . .	16,918	16,800	0,0070	-1	0	2	0	0	0	0	0
2	Энцелад	11,639	11,600	0,0035	0	-1	0	2	0	0	0	0
3	Феба . . .	8,448	8,400	0,0057	0	0	-1	0	2	1	0	2
4	Диона . . .	5,826	5,800	0,0045	0	0	0	-1	2	-1	0	-1
5	Реа . . .	3,530	3,500	0,0086	0	0	0	0	-1	2	2	0
6	Титан . . .	1,000	1,000	0,000	0	0	0	0	0	-3	4	0
7	Гиперион	0,7494	0,7500	0,0008	0	0	0	0	0	-1	0	5
8	Япет . . .	0,2010	0,2000	0,0050	0	0	0	0	0	0	-1	4

### Спутники Ураца

	Спутник	$\omega_i^H$	$\omega_i^T$	$\Delta\omega/\omega$	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$n_5$
1	Миранда . . .	6,529	6,545	-0,0025	-1	1	1	1	0
2	Ариэль . . .	3,454	3,454	0,0000	0	-1	1	2	-1
3	Умбриэль . . .	2,100	2,091	0,0043	0	0	-2	1	5
4	Титания . . .	1,000	1,000	0,0000	0	0	1	-4	3
5	Оберон . . .	0,6466	0,6364	0,0160	0	0	1	-2	0

с другом находятся, как правило, ближайшие друг к другу планеты (или спутники планет).

Ввиду того, что частоты мы вынуждены приближенно задавать конечными десятичными дробями (то есть рациональными числами), то, вообще говоря, всегда можно найти достаточно большие по модулю целые числа  $n_i$ , обеспечивающие резонансные соотношения для частот. Однако таблицы Молчанова содержат не большие  $|n_i|$ , а *малые*, что тоже говорит в пользу гипотезы Молчанова. На графике рис. 4.8 приведено распределение количества  $N$  данных чисел  $|n_i|$  в таблицах Молчанова в зависимости от величины  $|n_i|$ . Видим, что  $|n_i|$  сосредоточены в области небольших своих значений. Вряд ли поэтому открытые резонансные соотношения могут быть случайны.

В связи с этим для ответа на вопрос об устойчивости реальной Солнечной системы может оказаться важным обследование устойчивости как раз резонансных движений, выброшенных из рассмотрения в теории Арнольда (что, к слову сказать, не умаляет выдающегося значения этой теории). С другой стороны, гипотеза Молчанова рождает

больше вопросов, чем отвечает на них. Однозначна ли система «небольших» резонансных чисел, найденных Молчановым, или можно подобрать другую, не хуже? Ведь

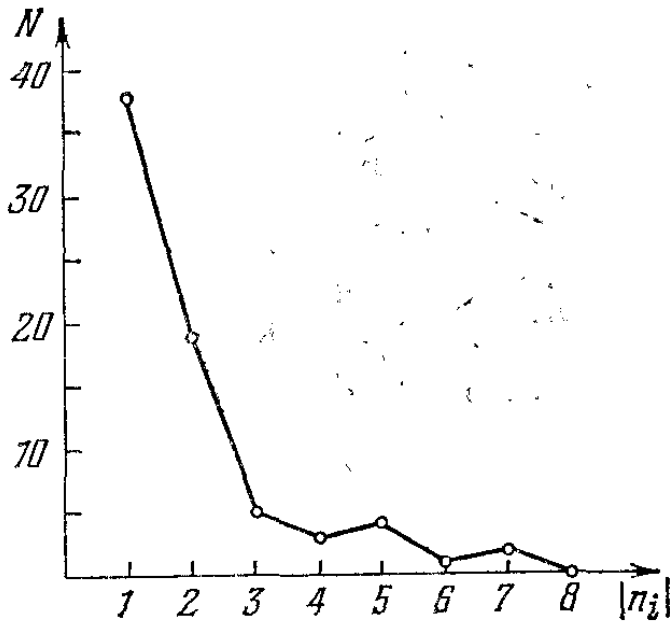


Рис. 4.8. Распределение резонансных чисел Солнечной системы.

отличие от нуля резонансных соотношений между наблюдаемыми (а не подобранными) частотами может достигать заметной величины по сравнению с наименьшими частотами Солнечной системы. Сравним, например, рассогласование 0,0135 в резонансе (4.5.1) с частотами 0,07197 и 0,04750 обращения Нептуна и Плутона.

Почему система «скатилась» в процессе эволюции именно к таким резонансам, а не к другим? Каков, наконец, действительный механизм «скатывания» системы в резонансный режим? Напомним, что гипотеза Молчанова пока гипотеза, поскольку не доказано строго математически, что колебательная система при каких-то условиях (каких?) обязательно выйдет на резонансный режим (да еще на режим *полного* резонанса \*).

Хорошо известно из наблюдений, что астероиды «избегают» двигаться по некоторым резонансным (с Юпитером) орбитам; щели в кольцах Сатурна тоже имеют резонансную структуру. Молодой московский математик А. Д. Брюно показал [4.11], что в канонических системах вероятность неустойчивости периодического режима тем больше, чем меньше порядок резонанса \*\*). На рис. 4.9, заимствованном из [4.12], показано распределение числа

\*) Богатая и интересная информация о подобных явлениях в природе и технике и о теории этих явлений содержится в недавно вышедшей книге И. И. Блехмана «Синхронизация динамических систем» («Наука», 1971).

\*\*\*) Пусть среднее суточное движение астероида равно  $n$ , а Юпитера —  $n_{Ю}$ . Тогда относительная средняя угловая скорость астероида равна  $n - n_{Ю}$ . Если отношение  $n_{Ю}/(n - n_{Ю}) = p/q$ , где  $q > 0$  и  $p$  и  $q$  — целые взаимно простые числа, то число  $q$ , по А. Д. Брюно [4.11], и называется порядком резонанса.

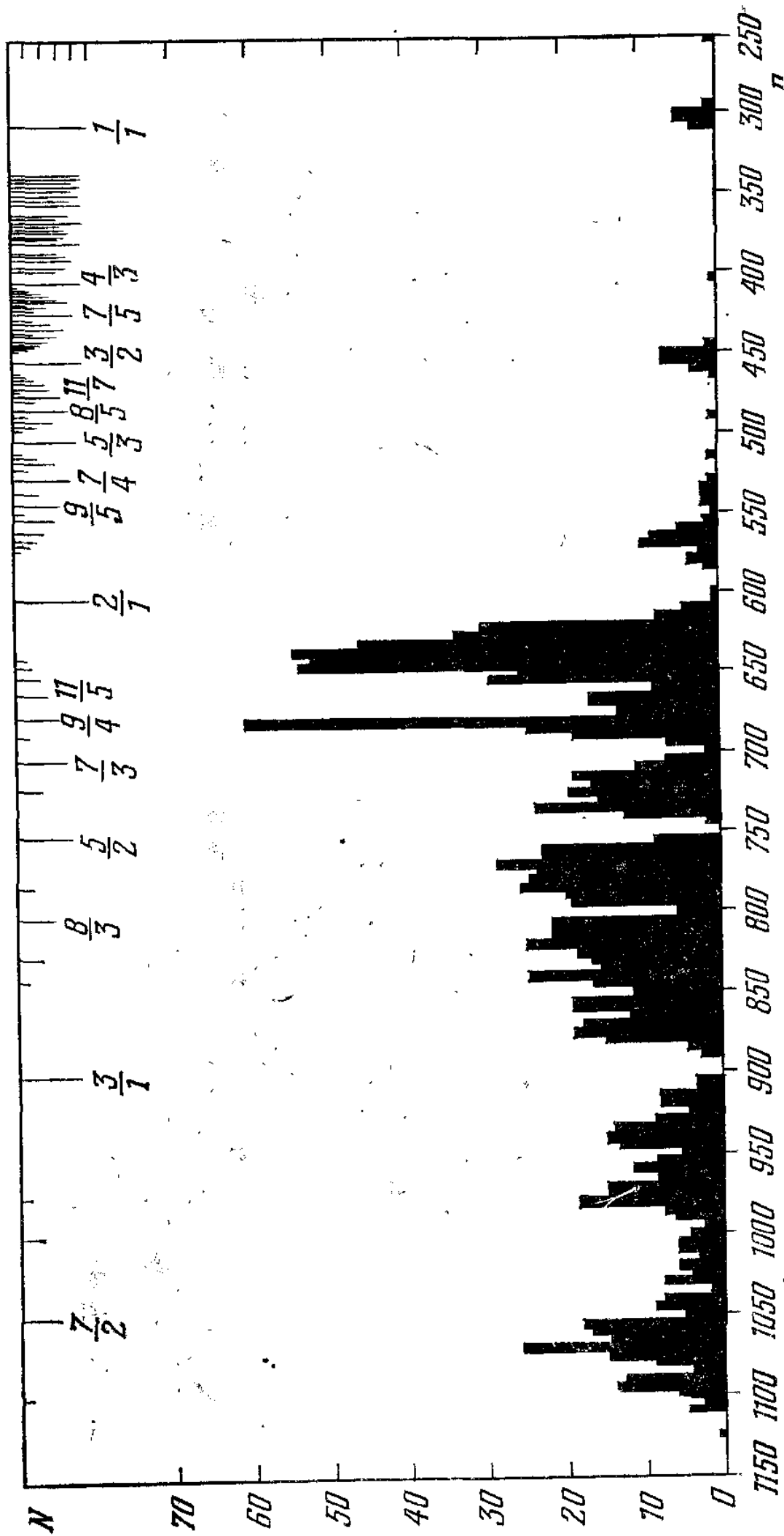


Рис. 4.9. Распределение астероидов.

астероидов по средним суточным движениям  $n$ ; по горизонтали отложены значения  $n$  (в секундах дуги за сутки), по вертикали заштриховано число астероидов в 5"-х интервалах средних суточных движений. Сверху указано отношение  $n/n_{Ю}$ , где  $n_{Ю} = 300''$  — среднее суточное движение Юпитера. Порядок резонанса равен разности между числителем и знаменателем этих отношений. А. Д. Брюно заметил, что характер наблюдаемых щелей (люков) в распределении астероидов качественно соответствует его теории. Щель порядка 3 ( $n/n_{Ю} = 5/2$ ) полная, возможное периодическое движение всегда неустойчиво — и таких движений нет. Щели более высоких порядков неполные, и с ростом порядка они становятся менее заметными, так как убывает вероятность неустойчивости: в зависимости от начальных условий движение может быть и устойчиво, и — с убывающей вероятностью, — неустойчиво.

Как сочетать гипотезу о резонансности Солнечной системы с нежеланием астероидов двигаться по резонансным орбитам? Дело, видимо, в том, что резонансные движения являются «особыми траекториями» системы и по аналогии с «особыми точками» дифференциальных уравнений могут быть устойчивыми или неустойчивыми. Поэтому система, эволюционируя, уходит от одних резонансов (неустойчивых) и скатывается в другие резонансы (устойчивые).

Особая роль резонансов в Солнечной системе проявляется и во вращательном движении планет вокруг своих осей. Всем известно, что Луна обращена одной стороной к Земле — прекрасный пример резонанса 1 : 1 между периодом обращения по орбите и периодом вращения вокруг оси. Мы еще позже, в другом очерке, вернемся к объяснению этого эффекта. Совсем недавно, после обработки данных радиолокации планет Меркурий и Венера, стали известны новые факты [4.13] о вращении этих планет. Оказывается, период вращения  $T_{вр}$  Меркурия относится к периоду обращения  $T_{обр}$ , как 3/2! И совсем уж феноменальный характер носит резонанс во вращении Венеры. Каждый раз, когда Земля и Венера максимально сближаются друг с другом, Венера оказывается повернутой к Земле одной и той же стороной, то есть вращение Венеры находится в резонансе даже не с ее орбитальным движением, а с движением Венеры относительно вращающейся линии Солнце — Земля!

Период вращения Венеры, по последним обработкам радиолокационных данных, составляет  $T_6^B = 243,24 \pm 01$  суток, что в пределах точности измерений совпадает со значением 243,16 суток, при котором Венера в каждом нижнем соединении должна быть обращена к Земле одной и той же стороной. Период соединений  $\tau = 583,92$  суток. В результате за это время Земля в беге по своей орбите опишет дугу

$$\alpha_3 \approx 2\pi + 2\pi \cdot 0,6 = \omega_3 \tau,$$

где  $\omega_3$  — среднее суточное движение Земли.

Аналогично, Венера в своем орбитальном движении опишет дугу

$$\alpha_B = 2\pi \cdot 2 + 2\pi \cdot 0,6 = \omega_B \tau;$$

вращаясь вокруг своей оси *обратным образом* (то есть в сторону, противоположную обращению по орбите) с угловой скоростью  $\Omega$ , Венера повернется вокруг оси за время  $\tau$  на угол

$$\beta = -2\pi \cdot 3 + 2\pi \cdot 0,6 = -\Omega \tau.$$

Таким образом, за время  $\tau$  все три угла  $\alpha_3$ ,  $\alpha_B$ ,  $\beta$  примут одинаковые значения  $\approx 2\pi \cdot 0,6$  (с точностью до кратных  $2\pi$ ). Вычитая последнее равенство из двух предыдущих, обнаружим, что

$$5 \cdot \frac{2\pi}{\tau} = \omega_B + \Omega,$$

$$4 \cdot \frac{2\pi}{\tau} = \omega_3 + \Omega.$$

Это означает, что за время  $\tau$  Венера относительно собственной орбитальной системы координат (относительно линии Солнце — Венера) сделает 5 полных оборотов, а относительно линии Солнце — Земля сделает 4 полных оборота. Два последних резонансных соотношения (ввиду того, что  $\frac{2\pi}{\tau} = \omega_B - \omega_3$ ) приводят к одному и тому же:

$$\Omega = 4\omega_B - 5\omega_3.$$

Данные о резонансах во вращении планет собраны в таблице 4.3.

Все сказанное свидетельствует в пользу особой и неслучайной роли резонансов в движении миров.

## Резонансы во вращении планет и их спутников

<i>1. Луна</i>	
Период обращения вокруг Земли, <i>ср. сутки</i> . . . . .	$T_0 = 27,32$
Период вращения вокруг своей оси, <i>ср. сутки</i> . . . . .	$T_\omega = 27,32$
Направление вращения . . . . .	прямое *)
Резонанс . . . . .	$\frac{T_\omega}{T_0} - 1 = 0$
<i>2. Меркурий</i>	
Период обращения вокруг Солнца, <i>ср. сутки</i> . . . . .	$T_0 = 87,97$
Период вращения вокруг оси, <i>ср.</i> <i>сутки</i> . . . . .	$T_\omega = 59 \pm 3$
Направление вращения . . . . .	прямое
Резонанс . . . . .	$\frac{3T_\omega}{2T_0} - 1 \approx \pm 0,017$
<i>3. Венера</i>	
Период обращения Венеры вокруг Солнца, <i>ср. сутки</i> . . . . .	$T_0^B = 224,7$
Период обращения Земли вокруг Солнца, <i>ср. сутки</i> . . . . .	$T_0^3 = 365,24$
Период между ближайшими по- ложениями Земли и Венеры, <i>ср. сутки</i> . . . . .	$\tau = 583,92$
Период вращения Венеры вокруг оси, <i>ср. сутки</i> . . . . .	$T_\omega^B = 243,24 \pm 0,1$
Направление вращения Венеры	обратное
Резонанс . . . . .	$\left( \frac{4}{T_0^B} - \frac{5}{T_0^3} - \frac{1}{T_\omega^B} \right) T_\omega^B \approx 0,001$
<p>*) Прямое вращение — вращение в сторону орбитального движения, обратное — в противоположную сторону.</p>	

Говорят, что всякая хорошая идея в процессе завоевания общественного мнения проходит три стадии:

«Этого не может быть»;

«Это может быть, но не доказано»;

«Это давно известно».

Идея А. М. Молчанова сейчас находится, по-видимому, где-то на полпути от первой стадии ко второй. Вокруг этой гипотезы кипят споры и страсти. И хотя она не доказана, само ее существование стимулирует развитие исследований в этом направлении; естественнонаучное значение этой гипотезы неоспоримо.

## 6. Сведения из теории устойчивости. Квантованность устойчивых движений

Идеи А. М. Молчанова перекликаются с более ранними идеями Н. Г. Четаева \*). Ему принадлежит интереснейшая мысль [4.14]: «устойчивость, явление принципиально общее, как-то должна, по-видимому, проявляться в основных законах природы».

Последовательно развивая эту мысль, Н. Г. Четаев пришел, в частности, к неожиданной картине квантования устойчивых орбит динамики, подобной тому как в квантовой механике квантуются орбиты электронов. Иначе говоря, устойчивы могут быть траектории не при любых начальных данных, а лишь при некоторых, исключительных.

Прежде чем переходить к анализу Н. Г. Четаева, дадим некоторые определения и — без доказательства — теоремы теории устойчивости А. М. Ляпунова. Доказательства можно найти, например, в книге Н. Г. Четаева [4.14]. Исследование устойчивости какого-либо движения  $q(t)$  можно заменой переменных свести к исследованию устойчивости решения  $x_i = 0$  некоторой системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_i, t), \quad X_s(0, t) \equiv 0 \quad (i, s = 1, \dots, n). \quad (4.6.1)$$

Уравнения (4.6.1) будем называть *уравнениями возмущенного движения*; частное их решение  $x_i = 0$  — *невозмущенным движением*. На правые части уравнений (4.6.1) накладывается обычно требование аналитичности.

**О п р е д е л е н и е 1** (А. М. Ляпунов). Если при всяком произвольно задаваемом числе  $A > 0$ , как бы мало оно ни было, может быть выбираемо число  $\lambda > 0$  так, чтобы при всяких возмущениях  $x_{10}, \dots, x_{n0}$ , удовлетворяющих условию  $\sum_s x_{s0}^2 \leq \lambda$ , и при всяком  $t \geq t_0$  выполнялось неравенство  $\sum x_s^2 < A$ , то невозмущенное движение устойчиво, в противном случае — неустойчиво.

Рис. 4.10 иллюстрирует определение устойчивости.

---

\*) Николай Гурьевич Четаев (1902—1959) — член-корр. АН СССР, выдающийся советский механик и математик, автор фундаментальных работ и идей в области теории устойчивости и аналитической механики.

Заметим, что понятие устойчивости, которым мы пользовались при описании результатов В. И. Арнольда, является более слабым, чем определение устойчивости по Ляпунову. Тому — две причины:

1) В. И. Арнольд требует (и доказывает) близости возмущенной и невозмущенной *траекторий*, а не близости, в любой момент времени, положения движущихся

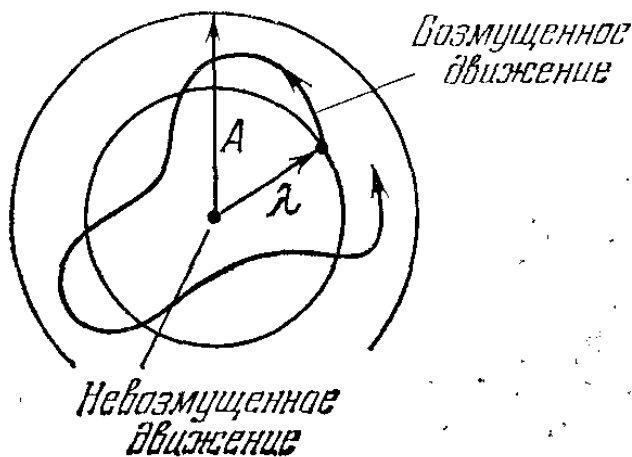


Рис. 4.10. К определению устойчивости по Ляпунову.

по этим траекториям точек. Если взять какое-либо условно-периодическое движение, устойчивое по В. И. Арнольду, то оно, вообще говоря, неустойчиво по Ляпунову.

2) По В. И. Арнольду, устойчивость доказывается не для всех начальных данных, а лишь для большинства из них. По Ляпунову, движение неустойчиво, если найдется *хоть*

*одна* возмущенная траектория, не удовлетворяющая определению устойчивости.

В дальнейшем в этом пункте всюду подразумевается устойчивость по Ляпунову.

До А. М. Ляпунова устойчивость движения исследовалась главным образом путем линеаризации уравнений (4.6.1) и анализа решений соответствующих линейных уравнений. После работ А. М. Ляпунова стало ясно, что линейные уравнения дают, вообще говоря, *лишь необходимые* условия устойчивости («если движение устойчиво, то эти условия будут выполнены»). Но на вопрос «если эти условия выполнены, то будет ли движение устойчиво?» нельзя всегда ответить утвердительно. Поиск достаточных условий устойчивости — одна из труднейших задач.

**О п р е д е л е н и е 2.** Пусть в области  $t > t_0$ ,  $\sum_s x_s^2 \leq \leq H$ ,  $H \neq 0$ , определена функция  $V(x_s, t)$ , принимающая только значения одного знака и нулевые значения. Тогда  $V$  называется *знакопостоянной функцией* (положительной или отрицательной).

**О п р е д е л е н и е 3.** Если знакопостоянная функция  $V$  не зависит от  $t$ , а постоянная  $H$  (в определении 2)



может быть выбрана достаточно малой для того, чтобы  $V$  уничтожалась только в начале координат (при всех  $x_s = 0$ ), то  $V$  называется *знакоопределенной функцией* (определенно-положительной или определенно-отрицательной).

**Примеры.** Функция от двух переменных  $x_1, x_2$   $V = x_1^2 + x_2^2$  определенно-положительная, а функции  $V = (x_1 + x_2)^2$  и  $V = x_1^2$  лишь знакопостоянны (положительны), так как обращаются в нуль, кроме начала координат, еще на множествах  $x_1 = -x_2$  (первая) и  $x_1 = 0$  (вторая). Функция  $V = x_1^2 - x_2^2$  не является знакопостоянной.

**О п р е д е л е н и е 4.** Функция  $V$ , зависящая от  $t$ , называется *знакоопределенной*, если найдется не зависящая от  $t$  определенно-положительная функция  $W$  такая, что одно из двух выражений  $V - W$  или  $-V - W$  есть функция положительная.

**Т е о р е м а 1 (А. М. Ляпунов).** Если дифференциальные уравнения (4.6.1) возмущенного движения таковы, что возможно найти *знакоопределенную функцию  $V$* , производная которой  $V' = \sum_s \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s + \frac{\partial V}{\partial t}$  в силу этих

уравнений есть функция *знакопостоянная противоположного с  $V$  знака или тождественно равна нулю*, то невозмущенное движение устойчиво.

Доказательство (см. [4.14]) основано на том, что при условиях теоремы траектория всегда останется внутри некоторой замкнутой вокруг начала координат поверхности  $W(x_s) \leq l$ .

Теорема Ляпунова дает достаточные условия устойчивости. Функция  $V$  называется *функцией Ляпунова*. Существует довольно богатый арсенал способов построения функций Ляпунова для задач различных классов. Но, к сожалению, не известен общий алгоритм построения функций Ляпунова для любых задач.

Теорема Ляпунова пригодится нам в одном из следующих очерков. А здесь нам будет интересно узнать для дальнейшего, что эта теорема позволяет в некоторых случаях решить вопрос об устойчивости, рассматривая лишь уравнения первого приближения. Но прежде — некоторые определения.

Функция  $x(t)$  называется *ограниченной*, если при любом  $t \geq t_0$  ее модуль  $|x(t)| < C$ , где  $C$  — некоторая постоянная. Функцию, модуль которой может делаться

бóльшим всякой данной положительной величины, как бы она ни была велика, назовем *неограниченной*. Ограниченная функция называется *исчезающей*, если  $x(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

**Л е м м а 1.** Если  $z = x(t) e^{\lambda t}$  представляет функцию, исчезающую при  $\lambda = \lambda_1$  и неограниченную при  $\lambda = \lambda_2$ , где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — вещественные постоянные, то всегда можно найти такое вещественное  $\lambda_0$ , что функция  $z$  при  $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon$  будет неограниченной для всякого положительного постоянного  $\varepsilon$  и исчезающей для всякого отрицательного постоянного  $\varepsilon$ .

**О п р е д е л е н и е 5.** Число  $\lambda_0$  называется *характеристическим числом* функции  $x(t)$ .

Рассмотрим теперь вместо системы (4.6.1) линеаризованную в окрестности начала координат систему

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \dots + p_{sn}x_n \quad (s = 1, \dots, n). \quad (4.6.2)$$

Здесь  $p_{sr}$  — вещественные, ограниченные, непрерывные функции  $t$ .

Пусть  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  — какое-либо решение системы (4.6.2). Под *характеристическим числом* этого решения будем понимать наименьшее из характеристических чисел функций  $x_1, \dots, x_n$ . Как известно, всегда найдется  $n$  независимых решений системы (4.6.2); они будут характеризоваться набором  $n$  характеристических чисел  $\kappa_s$  (каждое из которых, как можно показать, конечно). Обозначим их сумму

$$S = \sum_{s=1}^n \kappa_s.$$

Пусть еще  $\mu$  есть характеристическое число функции

$$\exp \left\{ - \int \sum_{s=1}^n p_{ss} dt \right\}.$$

**Л е м м а 2.**  $S + \mu \leq 0$ .

**О п р е д е л е н и е 6.** Система (4.6.2) называется *правильной*, если  $S + \mu = 0$ , и *неправильной* в противном случае.

Характеристические числа позволяют судить о качественном поведении решений системы (4.6.2) и делать выводы об устойчивости невозмущенного движения в пер-

вом (линейном) приближении. Это важно, так как интегрировать систему (4.6.2) в общем случае переменных коэффициентов  $p_{sr}(t)$  мы не умеем. А. М. Ляпуновым, однако, доказано, что характеристичные числа уравнений первого приближения позволяют во многих случаях судить об устойчивости или неустойчивости невозмущенного движения в силу и *полной системы* (4.6.1) дифференциальных уравнений возмущенного движения. А именно, верны следующие теоремы.

**Т е о р е м а 2** (А. М. Ляпунов). *Если система (4.6.2) дифференциальных уравнений первого приближения есть правильная и все ее характеристичные числа положительны, то невозмущенное движение устойчиво.*

**Т е о р е м а 3.** *Если система (4.6.2) дифференциальных уравнений первого приближения есть правильная и среди ее характеристичных чисел есть хотя бы одно отрицательное, то невозмущенное движение неустойчиво.*

Теперь мы обратимся к работе Н. Г. Четаева «Об устойчивых траекториях динамики» [4.14] с тем, чтобы обнаружить обещанные вначале неожиданные свойства устойчивых траекторий.

Рассмотрим гамильтонову систему с гамильтонианом

$$H = T - U_0 - W. \quad (4.6.3)$$

Здесь  $T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} g_{ij} p_i p_j$  — живая сила рассматриваемой

материальной системы, причем  $g_{ij}$  зависят только от обобщенных координат  $q_i$ ;  $p_i$  — обобщенные импульсы. Силовая функция  $U_0(q_1, \dots, q_n)$  не зависит от времени и известна. Кроме того, считаем, что на систему действуют консервативные возмущения, определяемые неизвестной нам силовой функцией  $W(q_1, \dots, q_n)$ .

Рассматриваемой материальной системе отвечает уравнение в частных производных Гамильтона — Якоби (см. очерк второй в настоящей книге).

Пусть

$$-ht + V(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad (4.6.4)$$

— полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби ( $\alpha_i$  — постоянные интегрирования,  $h = h(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  — полная механическая энергия). Полный интеграл (4.6.4) нам, вообще говоря, не известен не только потому, что не всегда можно проинтегрировать уравнение Гамильтона — Якоби, но и потому, что в (4.6.3) входит неизвестная функция  $W$ .

Пусть  $q^*(t)$ ,  $p^*(t)$  — некоторое невозмущенное движение, определяемое гамильтонианом (4.6.3), а  $q^*(t) + \xi(t)$ ,  $p^*(t) + \eta(t)$  — возмущенное движение. Исследование устойчивости движения  $q^*(t)$ ,  $p^*(t)$  определяется анализом линеаризованных в окрестности этого решения уравнений Гамильтона. Это так называемые *уравнения в вариациях Пуанкаре*:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi_i}{dt} &= \sum_j \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_i} \xi_j + \sum_j \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_i} \eta_j, \\ \frac{d\eta_i}{dt} &= - \sum_j \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial q_i} \xi_j - \sum_j \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_i} \eta_j \end{aligned} \right\} \quad (4.6.5)$$

$(i = 1, \dots, n).$

Здесь частные производные взяты, конечно, вдоль невозмущенной траектории  $q^*(t)$ ,  $p^*(t)$ . Оказывается, что каждому положительному характеристическому числу решения системы (4.6.5) сопутствует отрицательное характеристическое число другого решения системы (4.6.5). Это, по теореме 3, влечет неустойчивость невозмущенного движения. Поэтому, *если невозмущенное движение  $\xi = 0$ ,  $\eta = 0$  устойчиво, то все характеристические числа системы (4.6.5) суть нули.* Это необходимое условие устойчивости траектории  $q^*(t)$ ,  $p^*(t)$ . При этом система (4.6.5) оказывается правильной.

Известно, что с помощью полного интеграла (4.6.4) уравнения Гамильтона — Якоби общее решение нашей механической задачи определяется формулами

$$\beta_i = - \frac{\partial h}{\partial \alpha_i} t + \frac{\partial V}{\partial \alpha_i}, \quad p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, n), \quad (4.6.6)$$

где  $\beta_i$  — новые постоянные интегрирования.

Если невозмущенное движение  $q^*(t)$ ,  $p^*(t)$  устойчиво при любых возмущениях начальных данных, то оно устойчиво и при таких возмущениях, когда возмущаются лишь постоянные  $\beta_i$ . Но в этом случае, как показывает Н. Г. Четаев, первую группу уравнений в вариациях (4.6.5) можно записать в виде

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum_{j, s} \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s} \left( g_{ij} \frac{\partial V}{\partial q_j} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.6.7)$$

а вместо второй группы уравнений в вариациях взять соотношение, следующее из (4.6.6):

$$\eta_i = \sum_j \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \xi_j.$$

Далее, равенство нулю характеристических чисел решений системы (4.6.7) означает равенство нулю их суммы  $S$ ; правильность системы тогда влечет равенство нулю характеристического числа  $\mu$  функции

$$\exp \left\{ - \int L dt \right\}, \quad L = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial q_i} \left( g_{ij} \frac{\partial V}{\partial q_j} \right).$$

Оказывается далее, что  $\mu$  не может быть нулем в любом случае, кроме равенства нулю функции  $L$ . Итак, если невозмущенное движение  $q^*(t)$ ,  $p^*(t)$  устойчиво, то выполнено равенство

$$\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial q_i} \left( g_{ij} \frac{\partial V}{\partial q_j} \right) = 0. \quad (4.6.8)$$

Введем теперь, следуя Н. Г. Четаеву, функцию

$$\psi = A \exp ikV, \quad (4.6.9)$$

где  $k$  — постоянная,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $A$  — произвольная вещественная функция координат  $q_1, \dots, q_n$ . Оказывается, если подставить (4.6.9) в (4.6.8) и определить  $A$  через возмущающую функцию  $W$  так, чтобы удовлетворялись уравнения

$$\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial q_i} \left( g_{ij} \frac{\partial A}{\partial q_j} \right) = 2k^2 AW, \quad \sum_{i,j} g_{ij} \frac{\partial A}{\partial q_j} \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0, \quad (4.6.10)$$

то уравнение (4.6.8) перейдет в следующее:

$$\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial q_i} \left( g_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial q_j} \right) + 2k^2 (U_0 + h) \psi = 0. \quad (4.6.11)$$

Уравнение (4.6.11) содержит лишь известные функции  $g_{ij}(q_1, \dots, q_n)$  и  $U_0(q_1, \dots, q_n)$ , а также постоянные  $k, h$ . Это уравнение не содержит возмущающей функции  $W$ . Но если исходное движение  $q^*(t)$ ,  $p^*(t)$  в поле основных ( $U_0$ ) и возмущающих ( $W$ ) сил устойчиво относительно начальных возмущений, то должна существовать функция  $\psi$ , удовлетворяющая уравнению (4.6.11) в частных производных второго порядка. Однако известно, что такое

уравнение допускает однозначное, конечное и непрерывное во всем пространстве переменных  $q_1, \dots, q_n$  решение  $\psi$ , вообще говоря, не для любого значения  $h$ , а только для некоторых. Устойчивым траекториям отвечает лишь дискретное множество  $h_1, h_2, \dots, h_k, \dots$  значений постоянной  $h$  (!).

В частности, если рассматривать движение одной материальной точки массы  $m$  в прямоугольных координатах  $x_1, x_2, x_3$ , то уравнение (4.6.11) переходит в уравнение

$$\Delta\psi + 2k^2m (U_0 + h)\psi = 0, \quad (4.6.12)$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$  — оператор Лапласа. Уравнение (4.6.12) — знаменитое уравнение Шредингера из квантовой механики, имеющее непосредственное отношение к допустимым орбитам электронов. Как известно, может существовать только дискретное множество орбит электронов, отвечающих дискретным значениям  $h$  в (4.6.12) (см., например, [4.15]).

Таким образом, правила отбора устойчивых движений материальной точки совпадают с правилами квантования \*).

---

\*) С современным состоянием теории устойчивости Ляпунова читатель может познакомиться, например, по интересному обзору В. В. Румянцева [4.16].

## ОГРАНИЧЕННАЯ ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ И ПОЛЕТ К ЛУНЕ

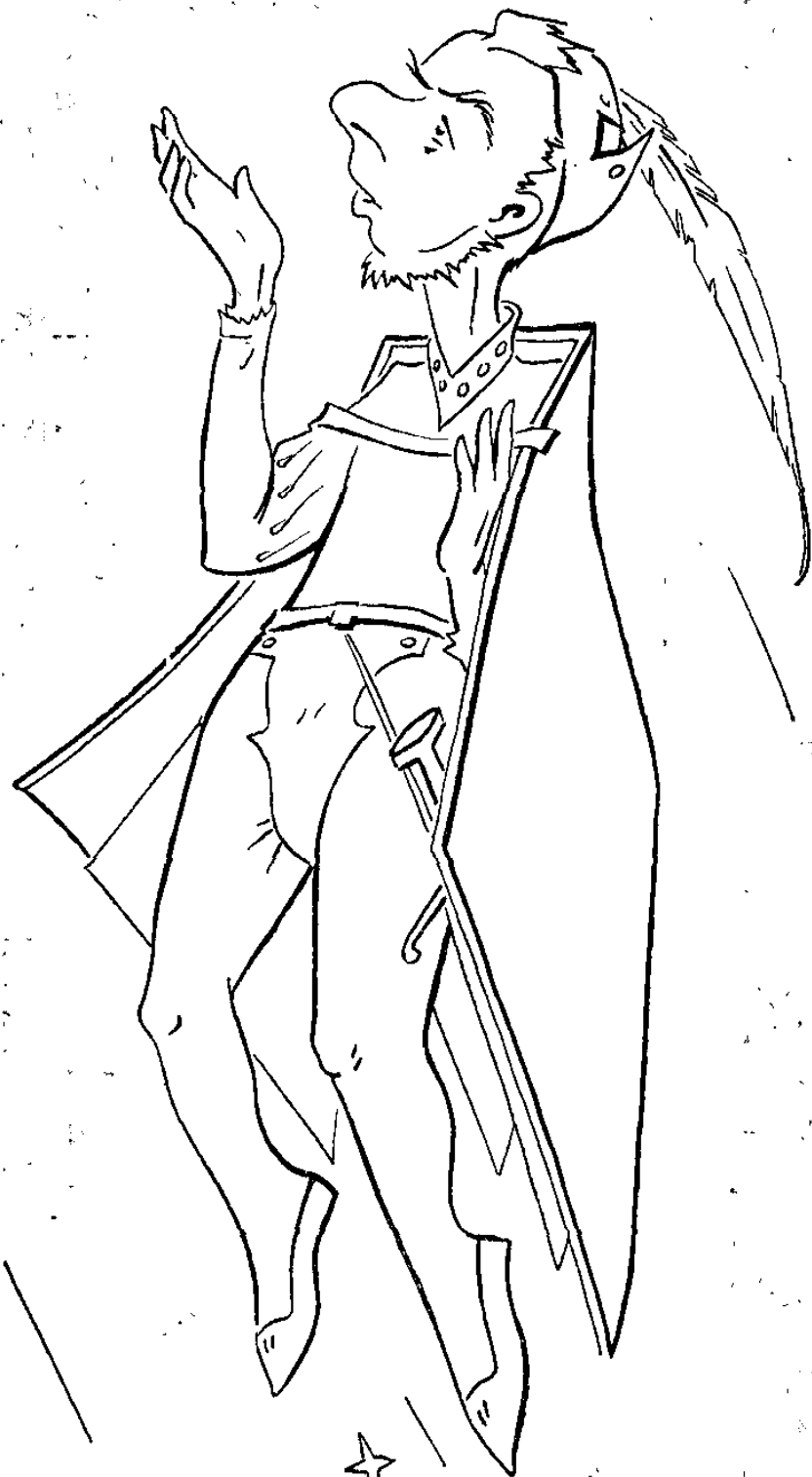
М е ф и с т о: ...Луна, тебе — мой поцелуй.  
(Распростирает свой темный на красной подкладке плащ,  
садится на него и со свистом улетает в шумно распах-  
нувшееся окно.)

А. В. Луначарский  
«Фауст и город»

### 1. Поверхности Хилла

Освоение маршрута Земля — Луна — Земля, происходящее на наших глазах, началось задолго до запуска первого спутника — на бумаге, в чертежах, в числах, полученных расчетами на быстродействующих электронных машинах. Уже в 1957 году В. А. Егоров опубликовал большую работу [5.1] с результатами анализа траекторий полетов к Луне. В этом маленьком очерке мы лишь вкратце остановимся на исследованиях В. А. Егорова, имея в виду показать, сколь много можно получить самыми простыми средствами. Подробное описание этих исследований можно найти в монографии [5.2]. Популярное, но очень глубокое изложение работ В. А. Егорова содержится также в книге В. И. Левантовского «Ракетой к Луне» [5.3].

Проблему полета к Луне можно рассматривать в рамках *ограниченной задачи трех тел*. Пусть  $m_1$  — масса Земли,  $m_2$  — масса Луны; под влиянием притяжения этих масс движется снаряд массы  $m_0$ , столь малой по сравнению с  $m_1$  и  $m_2$ , что притяжением Луны и Земли снарядом можно пренебречь. Тогда Луна и Земля движутся по известным кеплеровским траекториям вокруг общего центра масс. Примем эти траектории круговыми (круговая задача трех тел). Период обращения  $T$  по этим траекториям, деленный на  $2\pi$ , примем за единицу времени, а расстояние  $a$  между центрами Луны и Земли — за единицу длины ( $a = 384\,400$  км). Тогда по третьему закону Кеплера





в принятых единицах измерения

$$f(m_1 + m_2) = a^3 \left( \frac{T}{2\pi} \right)^{-2} = 1,$$

где  $f$  — универсальная постоянная тяготения.

Задача состоит в определении траектории точки  $m_0$ . Дифференциальные уравнения ее движения могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= 2\dot{y} + \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \\ \ddot{y} &= -2\dot{x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \\ \ddot{z} &= \frac{\partial\Phi}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (5.1.1)$$

где

$$\Phi = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + \frac{fm_1}{r} + \frac{fm_2}{\rho}. \quad (5.1.2)$$

Уравнения (5.1.1) и представляют собой уравнения движения нетяготеющей точки  $m_0$  в ограниченной круговой задаче трех тел. Координаты  $x, y, z$  определяют положение этой точки во вращающейся системе: ось  $x$  постоянно проходит через центры Земли и Луны; ось  $y$  находится в плоскости орбиты Луны и проходит через центр масс Луны и Земли \*). Ось  $z$  дополняет систему до правой. При этом

$$r = \sqrt{(x - x_1)^2 + y^2 + z^2}, \quad \rho = \sqrt{(x - x_2)^2 + y^2 + z^2},$$

где  $x_1$  и  $x_2$  — постоянные координаты точек  $m_1$  и  $m_2$ , расположенных на оси  $x$ ;  $r$  и  $\rho$  — соответственно расстояния от нетяготеющей точки (снаряда) до Земли ( $m_1$ ) и Луны ( $m_2$ ).

Уравнения (5.1.1), играющие огромную роль в небесной механике и механике космического полета, к сожалению, неинтегрируемы. Точнее говоря, до сих пор никому не удалось проинтегрировать эти уравнения в конечном виде. Исследование траекторий полета ракеты в системе

---

\*) Именно вращением системы координат вызваны члены  $2\dot{y}$  и  $-2\dot{x}$  в (5.1.1) и член  $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  в (5.1.2). Не будь этих членов, уравнения (5.1.1), (5.1.2) превратились бы в известные уже нам интегрируемые уравнения задачи двух неподвижных центров.

Луна — Земля приходится проводить либо какими-то приближенными способами, либо с помощью численного интегрирования уравнений движения.

Некоторые выводы, правда, можно сделать и на основе анализа уравнений (5.1.1). Легко получить, что эти уравнения имеют первый интеграл — интеграл Якоби

$$\frac{1}{2} V^2 = \Phi + h, \quad (5.1.3)$$

где  $V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$  — скорость движения во вращающейся системе,  $h$  — произвольная постоянная,

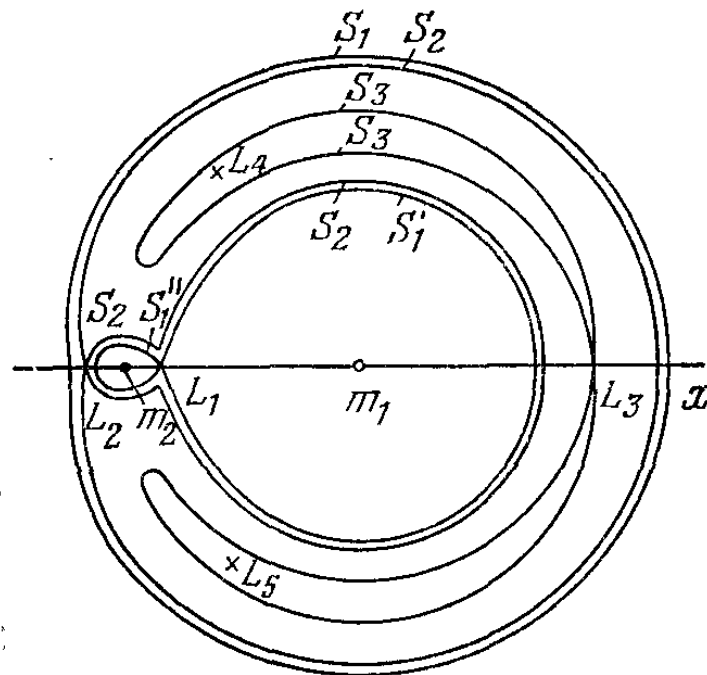


Рис. 5.1. Сечения поверхностей Хилла плоскостью лунной орбиты.

а  $\Phi(x, y, z)$  задается формулой (5.1.2). Так как  $V^2 \geq 0$ , то в реальном движении

$$\Phi(x, y, z) \geq -h. \quad (5.1.4)$$

Поверхности

$$\Phi(x, y, z) = -h, \quad (5.1.5)$$

ограничивающие область возможных движений, называются по имени первого их исследователя *поверхностями Хилла*. Для системы Луна — Земля  $m_1 : m_2 = 81,30$ , и в этом случае представление о поверхностях Хилла дает рис. 5.1.

На этом рисунке изображены сечения поверхностей (5.1.5) плоскостью  $z = 0$ ; нарисованы несколько поверхностей, отвечающие разным значениям постоянной энер-

гии относительного движения  $h$ . При больших отрицательных значениях  $h$ , как показывает исследование, движение возможно лишь внутри некоторых несоприкасающихся поверхностей  $S'$  и  $S''$ , близких к сферам с центрами  $m_1$  и  $m_2$ , да еще вне некоторой поверхности  $S$ , охватывающей поверхности  $S'$  и  $S''$ . Сечение каждой из поверхностей  $S'$  и  $S''$  близко к кругу. Эти поверхности не изображены на рис. 5.1, но их легко представить (небольшим сдвигом внутрь поверхностей  $S'_1$  и  $S''_1$  и наружу по отношению к поверхности  $S_1$ ). Значит, при таких значениях  $h$  снаряд может быть либо спутником Земли, либо спутником Луны (или еще может двигаться вдалеке от системы Луна — Земля, не пересекая границы  $S$ ).

Но не может быть такого движения, чтобы снаряд сначала двигался в близкой окрестности Земли, а с течением времени проник бы в близкую окрестность Луны; чтобы это стало возможным, необходимо увеличить постоянную энергии  $h$ . А именно, при некотором значении  $h = h_1$  поверхности  $S'$  и  $S''$  будут соприкасаться в общей точке  $L_1$ . Обозначим такие поверхности через  $S'_1$  и  $S''_1$  (рис. 5.1). Еще несколько увеличив значение  $h$ , так, чтобы разность  $h - h_1$  была мала, мы обнаружим, что около точки  $L_1$  на поверхности Хилла образовалась узкая горловина. Область возможных движений снаряда теперь уже включает в себя и окрестность Земли и окрестность Луны, которые соединены узкой горловиной. Значит, «не запрещены» такие траектории, которые начинаются в окрестности Земли и могут проникнуть в окрестность Луны через горловину около точки  $L_1$ . Иначе говоря, только при энергиях  $h > h_1$  становятся возможными полеты к Луне. Так как полет начинается всегда очень близко к Земле (допустим, с орбиты спутника Земли, находящейся на высоте 200 км от поверхности Земли), то вопрос увеличения энергии  $h$  — это вопрос увеличения начальной скорости  $V_0$ .

Начальное положение снаряда на орбите спутника Земли практически не влияет на величину скорости  $V_0$ , потребной, скажем, для обеспечения значения энергии  $h = h_1$  (назовем эту скорость  $V_0^{(1)}$ ; соответствующие численные значения будут приведены ниже).

Увеличим еще начальную скорость до такого значения  $V_0^{(2)}$  (энергию до значения  $h_2 > h_1$ ), что соприкоснутся поверхности  $S$  и  $S''$  в некоторой точке  $L_2$  (на рис. 5.1 этому случаю соответствует единая поверхность  $S_2$ ).

Ясно, что дальнейшее увеличение энергии приведет к появлению второй горловины около точки  $L_2$ . Это означает следующее. Если энергия ненамного превосходит  $h_2$ , то возможна такая траектория снаряда: он сначала находится в окрестности Земли, затем проникает через горловину около точки  $L_1$  в окрестность Луны, а потом через горловину у точки  $L_2$  покидает систему Земля — Луна. Сколько витков сделает снаряд вокруг Земли, прежде чем попасть в окрестность Луны? будет ли снаряд обращаться и вокруг Луны, как ее временный спутник, прежде чем вылететь прочь из системы Земля — Луна? — на эти вопросы ответа нет. Мы можем только утверждать, что при  $h > h_2$  траектории такого типа не являются запрещенными; они возможны, но существуют ли в действительности — не ясно без добавочных исследований. Ниже этот вопрос несколько прояснится. Пока же, рассматривая рис. 5.1, видим, что при некотором  $h = h_3$  запрещенной для движения областью является в каждой полуплоскости некоторая «каплеобразная» область, стягивающаяся в точку  $L_4$  (или  $L_5$ ) при увеличении значения  $h$  от  $h_3$  до  $h_4$ .

При  $h > h_3$  становится возможен уход снаряда в бесконечность в окрестности точки  $L_3$  на оси  $x$ , а при  $h > h_4$  ( $h_4 < 0$ ) снаряд может уйти в бесконечность по любому направлению в плоскости  $x, y$ . Мы рассмотрели эволюцию поверхностей Хилла в плоскости  $x, y$ . Однако в пространстве  $x, y, z$  исчезновение поверхностей Хилла, ограничивающих движение, происходит при  $h = 0$ .

Точки  $L_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ) называются *точками либрации*. В таблице 5.1 приведены результаты расчета расстояний  $r_i$  и  $\rho_i$  точек либрации соответственно от Земли и Луны, энергий  $h_i$ , отвечающих этим точкам, и скоростей  $V_0^{(i)}$ , отвечающих этим энергиям. При расчете  $V_0^{(i)}$

ТАБЛИЦА 5.1

Точка либрации	$r_i$	$\rho_i$	$h_i$	$V_0^{(i)}$ , в ед. $\frac{2\pi a}{T}$	$V_0^{(i)}$ , км/сек
$L_1$	0,8491539	0,1508461	-1,594067	10,60335	10,84890
$L_2$	1,1677237	0,1677237	-1,585991	10,60411	10,84968
$L_3$	0,9929263	1,9929263	-1,506062	10,61165	10,85738
$L_4$	1	1	-1,494001	10,61278	10,85854

принималось, что начальная точка находится на высоте 200 км от поверхности Земли.

Расстояния точек  $L_1$  и  $L_2$  от Луны равны соответственно 58 000 км и 65 000 км, то есть обе точки лежат внутри введенной в предыдущем очерке сферы действия Луны близко к границе этой сферы (ее радиус равен 66 000 км). Отметим малую разницу ( $\sim 1$  м/сек) между скоростями  $V_0^{(1)}$  и  $V_0^{(2)}$  (а также между  $V_0^{(3)}$  и  $V_0^{(4)}$ ). Это значит, что очень малое изменение начальной скорости может привести к качественному изменению траектории: при  $V_0 \approx V_0^{(1)}$  траектория обязательно ограничена, а при  $V_0 \approx V_0^{(2)}$  траектория уже может стать неограниченной: сила притяжения Луны сможет выбросить снаряд (через горловину  $L_2$ ) из системы Земля — Луна.

## 2. Отступление о точках либрации

Точки либрации  $L_i$  являются особыми точками поверхности  $\Phi(x, y, z) = h$ , то есть координаты этих точек суть решения системы уравнений

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0. \quad (5.2.1)$$

Важен механический смысл точек либрации: сравнивая уравнения движения (5.1.1) и условия (5.2.1), видим, что координаты точек либрации определяют *положения относительного равновесия*: если начальная скорость снаряда (во вращающейся системе) нулевая, то есть  $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ , а сам снаряд помещен в одну из точек либрации, то и все последующее время снаряд будет находиться в этой точке либрации.

Еще Лагранжем была поставлена задача об устойчивости этих положений равновесия. Будет ли снаряд двигаться неограниченное время в окрестности точек либрации, если его чуть-чуть отклонить от этой точки и (или) придать ему малую скорость? Быстро выяснилось, что точки либрации  $L_1, L_2, L_3$  *неустойчивы*.

Вопрос об устойчивости точек  $L_4$  и  $L_5$  оказался более сложным (эти точки называются *треугольными точками Лагранжа*, так как образуют треугольные конфигурации с притягивающими массами  $m_1$  и  $m_2$ ). Оказалось, что если линеаризовать уравнения движения (5.1.1) в окрестности треугольных точек либрации, то решение линейных

уравнений будет ограничено тогда и только тогда, когда отношение масс притягивающих точек  $\kappa = m_1/(m_1 + m_2)$  ( $m_1 < m_2$ ) удовлетворяет условию

$$\kappa(1 - \kappa) < \frac{1}{27}. \quad (5.2.2)$$

Если условие (5.2.2) не выполнено, равновесие неустойчиво. Если же условие (5.2.2) выполнено, то движение устойчиво в линейном приближении. Мы знаем, что этого может оказаться недостаточным для устойчивости.

Почти два столетия вопрос об устойчивости треугольных точек Лагранжа оставался открытым. Возможность прогресса в исследовании этой задачи наметилась лишь в последние годы, после того, как В. И. Арнольдом была сформулирована теорема об устойчивости равновесия в системах Гамильтона с двумя степенями свободы. Это дало возможность продвинуться в исследовании *плоской* задачи. Опираясь на результаты В. И. Арнольда, А. М. Леонтович показал [5.4], что для всех значений отношения масс, удовлетворяющих условию (5.2.2), движение устойчиво, кроме, может быть, некоторого дискретного множества значений этого отношения. Американские ученые Депри и Депри-Бартоломе [5.5] впоследствии указали конкретно, что представляет собой это исключительное множество. Завершающий удар по проблеме был нанесен в 1969 году А. П. Маркеевым [5.6].

Результаты А. П. Маркеева позволяют сформулировать следующую теорему. *Треугольные точки Лагранжа устойчивы для всех отношений масс, удовлетворяющих условию (5.2.2), кроме двух отношений:*

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= \frac{15 - \sqrt{213}}{30} = 0,0135160 \dots, \\ \kappa &= \frac{45 - \sqrt{1833}}{90} = 0,0242938 \dots, \end{aligned} \right\} \quad (5.2.3)$$

*при которых треугольные точки Лагранжа неустойчивы.*

Этой теоремой закрывается имеющая двухсотлетнюю историю проблема об устойчивости точек либрации в плоской ограниченной круговой задаче трех тел.

Пространственная задача продолжает исследоваться.

Отметим, что устойчивость точек либрации существенно обусловлена влиянием так называемых «гироскопических» членов в уравнениях движения. Эти члены появились потому, что рассматривается движение во вращающейся

(вместе с линией Земля — Луна) системе координат. Равновесие сил притяжения и центробежных сил как раз достигается в точках либрации.

В теории устойчивости доказывалось, что «гироскопическая» устойчивость разрушается силами диссипации (силы сопротивления межпланетной материи, например). Поэтому при наличии диссипативных сил частица, пришедшая в окрестность точки либрации, может задержаться около этой точки лишь временно, — может быть, на очень длительное время, но не навсегда.

Тем интереснее отметить, что в 1961 году польский астроном К. Кордылевский обнаружил в окрестности треугольных точек либрации системы Земля — Луна скопления космической пылевой материи. Эти образования, возможно, носят нестабильный характер — часть пылинок постепенно уходит из окрестностей точек либрации под влиянием возмущающих сил, но на место ушедших пылинок приходят новые из окружающего пространства.

Вернемся теперь снова к задаче о полете к Луне.

### 3. Траектории сближения и метод их исследования

Итак, если в окрестности Земли сообщить снаряду скорость (во вращающейся системе)  $V_0^{(1)} = 10,84890 \text{ км/сек}$  (см. таблицу 5.1), то снаряд имеет шанс рано или поздно попасть в близкую окрестность Луны.

Но рано или поздно?

Ведь практически интересны быстрые полеты к Луне, а не такие, которые будут длиться... несколько столетий. Между тем численные расчеты показывают, что, получив скорость  $V_0^{(1)}$ , снаряд достигнет расстояния «всего» около 260 000 км от Земли (а до Луны-то 384 400 км!) и вернется назад к Земле, правда, на следующем обороте снаряд достигнет расстояния от Земли чуть большего, но опять вернется к Земле и т. д. Нужны, видимо, сотни или тысячи оборотов вокруг Земли, чтобы снаряд смог близко подойти к «горловине» около точки либрации  $L_1$  и пролететь через нее к Луне.

Так лететь скучно и долго. Лучше обеспечить подлет к Луне на первом же витке траекторий.

Будем рассматривать такие траектории, которые на первом своем (относительно Земли) витке пересекают сферу действия Луны. Эти траектории названы В. А. Егоровым *траекториями сближения*.

Среди траекторий сближения особый интерес представляют такие, которые обеспечивают попадание в Луну на первом обороте снаряда вокруг Земли; минимальная абсолютная скорость, необходимая для такого попадания, по В. А. Егорову, составляет  $V_1 = 10,90525$  км/сек. Эта скорость рассчитана без учета притяжения Луны, но такой учет мало влияет на величину  $V_1$ . Поэтому скорость  $V_1$  следует рассматривать как некоторую опорную, характерную скорость. Интересно составить таблицу характерных начальных скоростей полета в системе Земля — Луна (все расчеты — для начальной высоты 200 км над поверхностью Земли; скорости пересчитаны на невращающуюся систему координат):

$V_0^{(1)} = 10,86570$  км/сек — в принципе возможно достижение Луны после многих оборотов вокруг Земли;

$V_0^{(2)} = 10,86640$  км/сек — возможен вылет из системы Луна — Земля (с использованием притяжения Луны для дополнительного разгона);

$V_1 = 10,90525$  км/сек — минимально необходимая скорость достижения Луны на первом витке траектории относительно Земли;

$V_{II} = 10,99967$  км/сек — параболическая скорость, обеспечивает вылет из системы Луна — Земля (независимо от действия притяжения Луны).

Выше уже говорилось о том, что задача вычисления траектории полета к Луне очень сложна, так как даже с учетом только главных факторов — притяжения Луны и Земли — задача не решается в аналитическом виде.

Если бы исследовалось движение спутника Земли с учетом притяжения Луны, то, как мы знаем по предыдущему очерку, можно было бы использовать малость лунных возмущений для применения асимптотических методов анализа.

В рассматриваемом здесь случае этого сделать нельзя, так как влияние Луны не только не мало, но и доминирует при подлете к Луне.

Однако именно этим можно воспользоваться для построения приближенного алгоритма расчета траекторий полетов к Луне. Будем рассматривать только траектории сближения. Тогда влияние Луны мало до тех пор, пока снаряд не вошел в сферу действия Луны. До этого момента полностью пренебрежем влиянием Луны. Наоборот, при движении снаряда в сфере действия Луны учтем ее притяжение, но полностью пренебрежем влиянием Земли. Тогда



задача трех тел сведется к двум задачам двух тел, а задачу двух тел решить, как известно, нетрудно. Ее решением являются кеплеровские траектории. Алгоритм расчета траектории полета к Луне будет теперь строиться так:

1) рассчитываем геоцентрическое движение от Земли до сферы действия Луны по законам Кеплера;

2) на границе сферы действия пересчитываем параметры геоцентрического движения на параметры селеноцентрического движения;

3) рассчитываем селеноцентрическую кеплерову траекторию;

4) если надо, расчет можно продолжить и дальше: после выхода из сферы действия Луны рассчитать новую геоцентрическую траекторию.

Такой метод расчета траекторий небесных тел предложен еще Лапласом (применительно к движению естественных небесных тел).

Оказалось, что этот простой метод расчета дает отличные прикидки параметров движения, мало отличающиеся от точных значений параметров. Это было проверено сравнением приближенного расчета с результатами численного интегрирования уравнений движения. Указанный метод с успехом применялся для расчета орбит лунных аппаратов в работах В. А. Егорова [5.1], [5.2], работе Д. Е. Охоцимского, М. Л. Лидова, Н. А. Тесленко [5.7] и других. Разберем, следуя В. А. Егорову, несколько подробнее примерный ход построения траекторий лунных перелетов.

Пусть снаряд стартует из точки  $A_0$  в окрестности Земли (рис. 5.2) и движется по дуге кеплерова эллипса в направлении к Луне, которая в начальный момент находится в точке  $L_0$ . (На рис. 5.2 изображена траектория для вполне конкретного случая: вдоль траектории отложено время полета в сутках.) В точке  $A_1$  снаряд пересекает сферу действия Луны (пунктирная окружность на рис. 5.2). Луна к этому моменту времени успела переместиться вдоль своей траектории из точки  $L_0$  в точку  $L_1$ . Геоцентрическая скорость снаряда в момент пересечения сферы действия изображена на рис. 5.2 вектором  $v_{вх}$ . Согласно ранее принятой договоренности в этот момент мы должны пересчитать движение на селеноцентрическое. Скорость движения Луны по орбите есть  $v_{л1}$ . Абсолютная величина этой скорости  $|v_{л1}| = 1,02 \text{ км/сек}$ . Скорость

снаряда относительно Луны

$$v'_{\text{вх}} = v_{\text{вх}} - v_{\text{Л1}} \quad (5.3.1)$$

вычисляется по обычной формуле: «относительная скорость равна разности абсолютной и переносной скоростей». Переносная скорость в нашем случае — скорость Луны;

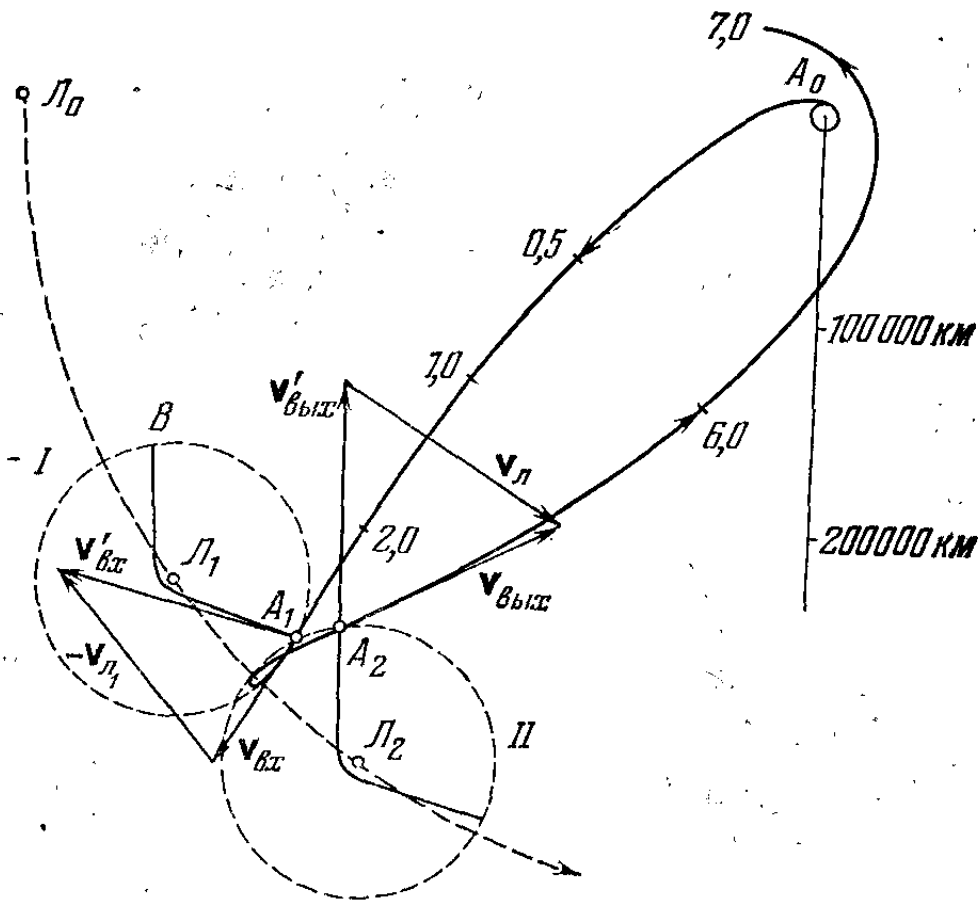


Рис. 5.2. Приближенный расчет траектории облета Луны по В. А. Егорову. (Цифры вдоль траектории — время полета в сутках.)

отсюда — векторная формула (5.3.1). Векторы  $v'_{\text{вх}}$ ,  $-v_{\text{Л1}}$  также изображены на рис. 5.2.

Итак, снаряд вошел в сферу действия Луны со скоростью  $v'_{\text{вх}}$ .

В. А. Егоровым обнаружен достопримечательный факт: для любых траекторий сближения скорость  $|v'_{\text{вх}}|$  входа снаряда в сферу действия Луны, вычисленная относительно Луны, будет всегда больше селеноцентрической параболической скорости на границе сферы действия. Эта последняя скорость  $V_{\text{п}} = 0,383$  км/сек обеспечивает неизбежный выход снаряда из сферы действия Луны. Так как  $|v'_{\text{вх}}| > V_{\text{п}}$ , то снаряд либо попадет в Луну, либо обязательно покинет сферу действия Луны, обогнув Луну по гиперболической траектории.

На рис. 5.2 изображена такая гиперболическая траектория, огибающая Луну внутри сферы действия. Снаряд пролетит по этой траектории из точки  $A_1$  в точку  $B$ . Но за время движения снаряда по дуге  $\overline{A_1B}$  сфера действия Луны сама переместится из положения  $I$  в положение  $II$ . Когда снаряд пересечет сферу действия, выходя из нее в точке  $B$ , Луна будет занимать положение  $L_2$ , а точка  $B$  займет положение  $A_2$ . В результате гиперболическая относительно Луны траектория  $A_1B$  является относительно Земли «странной» петлеобразной траекторией  $A_1A_2$ . Описав эту петлю, снаряд выйдет из сферы действия Луны, имея относительно ее скорость  $v'_{\text{вых}}$  (она по величине практически равна скорости  $v'_{\text{вх}}$ , но имеет, конечно, другое направление). Геоцентрическая скорость выхода  $v_{\text{вых}}$  вычисляется по формуле «абсолютная скорость равна сумме относительной и переносной скоростей», так что

$$v_{\text{вых}} = v'_{\text{вых}} + v_{L_2}. \quad (5.3.2)$$

Вектор  $v_{\text{вых}}$  изображен на рис. 5.2, и по величине и направлению этого вектора нетрудно построить теперь кеплеровскую траекторию возвращения в окрестность Земли, как это и сделано на рис. 5.2.

Мы видим на этом примере, что метод, примененный В. А. Егоровым позволяет строить сложные траектории задачи трех тел очень простыми средствами. Уже отмечалось, что этот метод обладает точностью, достаточно высокой, чтобы быть использованным на стадии предварительного проектирования орбит полетов к Луне. В. А. Егоровым были рассчитаны, проанализированы и описаны в [5.1, 5.2] сотни траекторий лунных перелетов, составлена полная классификация траекторий сближения и рассмотрен ряд других интересных задач динамики полета к Луне. Об этом подробно и увлекательно рассказано в отличных научно-популярных книгах В. И. Левантовского [5.3, 5.8], после знакомства с которыми будет не «страшна» и оригинальная книга В. А. Егорова [5.2]. Для первого знакомства с проблемой интересна обзорная статья Л. И. Седова [5.9] об орбитах лунных ракет.

## ОНИ ВАЛЬСИРУЮТ НА ОРБИТАХ

Это дамы, которые в небе танцуют...

*Гийом Аполлинер*

Земля плывет по своей орбите, величаво вращаясь вокруг оси. Крутятся вокруг своих осей большие и малые планеты. Неленивый и любопытный читатель наблюдал, конечно, проплывающие по ночному небу звездочки, то ярко вспыхивающие, то потухающие подобно светлячкам: это искусственные спутники в своих коловращениях поворачиваются к наблюдателю разными сторонами, подставляя Солнцу то большой блестящий бок, то днище, отражающее мало света.

Танцы светил сложны и разнообразны. Иные степенно покачиваются, иные медленно поворачиваются сразу вокруг нескольких своих осей, а иные вертятся со страшной скоростью, как щенок, догоняющий собственный хвост.

Изучению закономерностей вращений искусственных спутников посвящен раздел механики космического полета — динамика движения искусственного спутника относительно собственного центра масс [6.1].

О некоторых примечательных эффектах во вращении и ориентации спутников пойдет речь в предлагаемом очерке.

### 1. Гравитационный потенциал

Для задач, которые мы собираемся здесь рассмотреть, движение спутника около своего центра масс будет существенно определяться моментами гравитационных сил. В свою очередь эти моменты легко вычисляются через силовую функцию (взятая с обратным знаком, она называется гравитационным потенциалом), описывающую действие ньютоновского центрального поля сил на наш спутник. Мы знаем, что если спутник можно рассматривать как материальную

точку с массой  $dm$ , то силовая функция  $dU$  дается формулой

$$dU = \frac{\mu dm}{r}, \quad (6.1.1)$$

где  $\mu = fM$  ( $f$  — универсальная постоянная тяготения,  $M$  — масса Земли),  $r$  — расстояние от «спутника» (точки с массой  $dm$ ) до центра Земли.

Но в задачах о движении спутника относительно собственного центра масс существенно как раз то, что спутник является протяженным телом, а не материальной

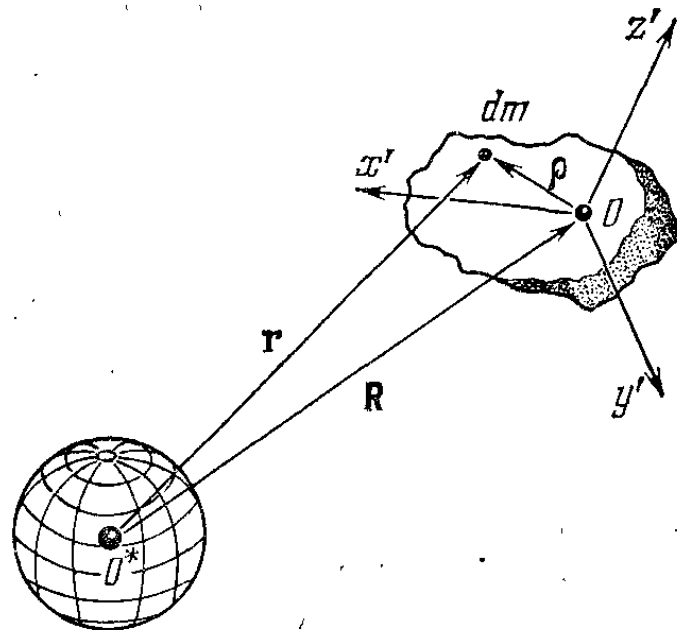


Рис. 6.1. К вычислению гравитационного потенциала.

точкой. Тогда формула (6.1.1) верна для каждого элемента  $dm$  объема спутника и, будучи распространена на весь этот объем  $V$ , запишется в виде

$$U = \mu \int_V \frac{dm}{r}. \quad (6.1.2)$$

Пусть (рис. 6.1)  $R$  — расстояние от центра притяжения  $O^*$  до центра масс спутника  $O$ . Со спутником жестко свяжем систему координат  $Ox'y'z'$ . Расстояние  $\rho$  от  $O$  до текущей точки  $dm$  вычисляется тогда по формуле  $\rho^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ , угол между векторами  $\mathbf{R}$  и  $\rho$  определяется своим косинусом:

$$\cos(\widehat{\mathbf{R}, \rho}) = \frac{x'}{\rho} \gamma + \frac{y'}{\rho} \gamma' + \frac{z'}{\rho} \gamma''.$$

Здесь  $\gamma, \gamma', \gamma''$  — направляющие косинусы вектора  $\mathbf{R}$  в осях  $x', y', z'$ , так что  $\gamma = \cos(\mathbf{R}, \widehat{x'})$ ,  $\gamma' = \cos(\mathbf{R}, \widehat{y'})$ ,  $\gamma'' = \cos(\mathbf{R}, \widehat{z'})$ . В этих обозначениях в формуле (6.1.2)

$$r = \sqrt{R^2 + 2R(x'\gamma + y'\gamma' + z'\gamma'') + x'^2 + y'^2 + z'^2}. \quad (6.1.3)$$

Интегрирование в (6.1.2) проходит по текущим координатам  $x', y', z'$ , в результате чего можно получить явную зависимость

$$U = U(R, \gamma, \gamma', \gamma''). \quad (6.1.4)$$

Таким образом, силовая функция (6.1.2) зависит как от расстояния спутника до притягивающего тела, так и от ориентации спутника относительно направления «притягивающий центр — центр масс спутника».

Как можно показать [6.1], проекции моментов гравитационных сил, записываются в виде

$$M_{x'} = \gamma'' \frac{\partial U}{\partial \gamma'} - \gamma' \frac{\partial U}{\partial \gamma''}, \quad M_{y'} = \gamma \frac{\partial U}{\partial \gamma''} - \gamma'' \frac{\partial U}{\partial \gamma},$$

$$M_{z'} = \gamma' \frac{\partial U}{\partial \gamma} - \gamma \frac{\partial U}{\partial \gamma'}. \quad (6.1.5)$$

Конкретный вид  $U$  и моментов (6.1.5) зависит, вообще говоря, от формы тела и распределения масс в его объеме. Это усложняет анализ. Однако дело облегчается тем, что спутники имеют малые размеры по сравнению с расстоянием  $R$ . Поэтому величины  $x'/R, y'/R, z'/R$  малы и выражение (6.1.3) можно разложить в ряд по степеням этих величин. Оставляя в этом разложении лишь числа до второго порядка малости включительно, интеграл (6.1.2) уже просто вычислить. При этом учитывается, что интегралы  $\int_V z' dm = \int_V y' dm = \int_V x' dm = 0$  (поскольку начало системы координат  $Ox'y'z'$  является центром масс спутника) и что положение осей  $x', y', z'$  в спутнике можно выбрать так, что

$$\int_V x'y' dm = \int_V x'z' dm = \int_V y'z' dm = 0.$$

Выбранные таким образом оси  $x', y', z'$  являются главными центральными осями инерции спутника. При

сделанных упрощениях вычисление  $U$  по формуле (6.1.2) приводит к формуле

$$U \approx \frac{\mu m}{R} + \frac{\mu}{2R^3} (A + B + C) - \frac{3}{2} \frac{\mu}{R^3} (A\gamma^2 + B\gamma'^2 + C\gamma''^2). \quad (6.1.6)$$

Здесь  $m$  — масса спутника, а постоянные

$$A = \int_V (y'^2 + z'^2) dm, \quad B = \int_V (z'^2 + x'^2) dm,$$

$$C = \int_V (x'^2 + y'^2) dm$$

суть главные центральные моменты инерции спутника. Формулы (6.1.5) при этом приобретают вид

$$M_{x'} = 3 \frac{\mu}{R^3} (C - B) \gamma'' \gamma', \quad M_{y'} = 3 \frac{\mu}{R^3} (A - C) \gamma \gamma'',$$

$$M_{z'} = 3 \frac{\mu}{R^3} (B - A) \gamma' \gamma. \quad (6.1.7)$$

## 2. О вращении Луны

С древнейших времен люди обращали внимание на неизменность лунного лика. Луна всегда обращена к Земле одной и той же стороной, и ее «затылка» люди не могли видеть вплоть до октября 1959 года, когда обратная сторона Луны была впервые сфотографирована советской автоматической станцией.

Такое неизменное положение Луны относительно Земли означает, что период осевого вращения Луны в точности совпадает с периодом ее обращения вокруг Земли. Для простоты будем считать лунную орбиту круговой.

Введем орбитальную систему координат  $O\tau\eta\gamma$  следующим образом (рис. 6.2). Начало координат  $O$  поместим в центр масс Луны, ось  $\eta$  направим из центра масс вдоль геоцентрического радиуса-вектора  $\mathbf{R}$  Луны, ось  $\tau$  — по касательной к круговой орбите и ось  $\eta$  — по нормали к плоскости лунной орбиты. Таким образом, орбитальная система координат — вращающаяся; оси  $\tau$  и  $\eta$  лежат всегда в плоскости лунной орбиты и поворачиваются вокруг оси  $\eta$  с угловой скоростью  $\omega$  орбитального движения. (Линейная скорость движения центра масс Луны по орбите  $V = \omega R$ .)

Угловая скорость осевого вращения Луны тоже равна  $\omega$  и направлена по  $n$ ; осевое вращение совершается в сторону орбитального движения. В результате этого Луна все время обращена одной стороной к Земле и, как можно понять, *неподвижна относительно орбитальной системы*

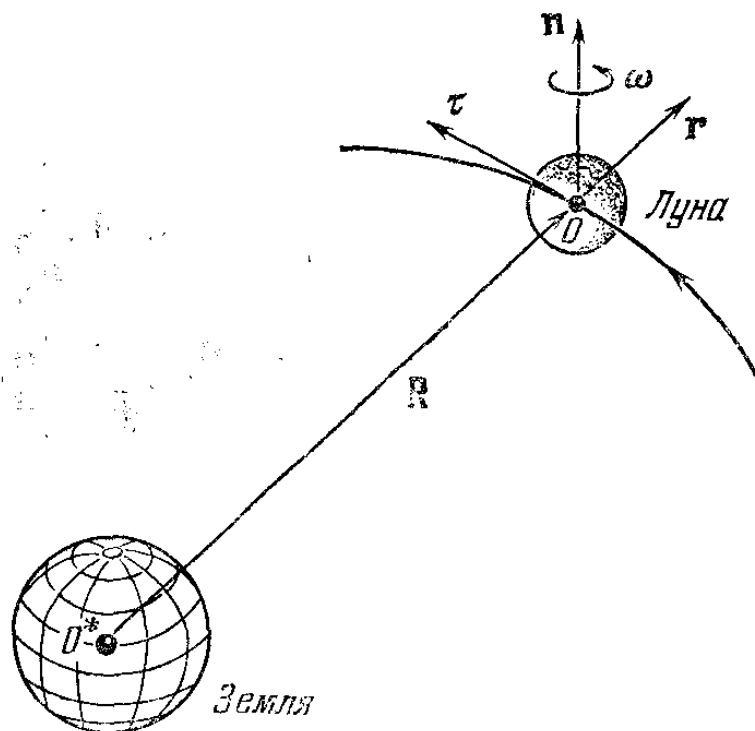


Рис. 6.2. Орбитальная система координат.

координат. Иначе говорят, что Луна *находится в относительном равновесии* (с точностью до малых покачиваний — либраций).

Заметим, что вращение Луны определяется в первом приближении законами Кассини, согласно которым ось вращения Луны находится в относительном равновесии в системе координат, вращающейся вместе с линией узлов лунной орбиты; эта ось Луны нормальна к линии узлов, угол между осью вращения Луны и нормалью к плоскости ее орбиты составляет  $6^{\circ}41'$ . Здесь мы не учитываем движения линии узлов лунной орбиты. Это позволяет заменить законы Кассини более простым движением — относительным равновесием в орбитальной системе координат. (Подробнее о законах Кассини см. [6.14])

Совпадение рассматриваемых угловых скоростей вращения и обращения небесного тела не может быть случайным, тем более что в Солнечной системе это, по-видимому, не единичное явление. Астрономические наблюдения последних лет говорят в пользу того, что спутники Юпитера Ио, Европа, Каллисто и спутники Сатурна Тефия, Рея, Диона, Япет все время обращены одной стороной



к центральной планете [6.2] (см. также *Astroph. J.*, v. 165, p. 431, 1971). По некоторым сведениям, даже спутники Марса Фобос и Деймос движутся подобным образом [6.2'].

Чтобы это было возможно не случайным образом, должен существовать какой-то стабилизирующий фактор, удерживающий спутники (Луну, например) в положении относительного равновесия. Этот фактор должен влиять и на искусственные спутники Земли.

Таким стабилизирующим фактором являются гравитационные моменты, определяемые гравитационным потенциалом (6.1.6). Покажем это.

### 3. Устойчивость относительного равновесия в гравитационном поле

Задача об устойчивости относительного равновесия искусственного спутника в гравитационном поле возникла в середине пятидесятых годов нашего бурного столетия, но имеет древнюю, уходящую в глубь веков предысторию. В небесной механике исследования устойчивости относительного равновесия Луны и ее колебаний (либраций) восходят к Лагранжу (1780). Эти классические исследования проводились на основе линеаризованных уравнений малых колебаний. После трудов А. М. Ляпунова (1892) стало понятным, что анализ линейных уравнений, вообще говоря, не дает ответа на вопрос об устойчивости. В 1959 году автором этой книги было впервые опубликовано [6.3] проведенное еще в 1956—1957 гг. строгое в смысле Ляпунова и в смысле механической постановки задачи исследование вопроса о существовании и устойчивости относительного равновесия твердого тела в гравитационном поле. Один из основных результатов этого исследования описывается ниже в упрощенном изложении. Более подробный анализ читатель может найти в [6.1, 6.3].

Если Луна (или искусственный спутник Земли) движется по круговой орбите, то в орбитальной системе координат на Луну (спутник) будут действовать силы: гравитационные, центробежные и кориолисовы. Моменты кориолисовых сил не производят работы, а моменты гравитационных и центробежных сил определяются потенциалами (6.1.6) для гравитационных сил и аналогичным выражением для потенциала центробежных сил

$$U_{\beta} = \frac{1}{2} \omega^2 \{A\beta^2 + B\beta'^2 + C\beta''^2\}. \quad (6.3.1)$$

Здесь  $\beta, \beta', \beta''$  — направляющие косинусы нормали  $\mathbf{n}$  к плоскости орбиты с осями  $x', y', z'$ , так что

$$\beta = \cos(\mathbf{n}, \widehat{x'}), \quad \beta' = \cos(\mathbf{n}, \widehat{y'}), \quad \beta'' = \cos(\mathbf{n}, \widehat{z'}).$$

Приведем вывод для дотошного читателя: компонента элементарного момента центробежных сил, например, по оси  $x'$  будет

$$\begin{aligned} dM_{x'} &= y' f_{z'} - z' f_{y'} = \\ &= \{y' [(x'\alpha + y'\alpha' + z'\alpha'')\alpha'' + (x'\gamma + y'\gamma' + z'\gamma'')\gamma''] - \\ &\quad - z' [(x'\alpha + y'\alpha' + z'\alpha'')\alpha' + (x'\gamma + y'\gamma' + z'\gamma'')\alpha'']\} \omega^2 dm. \end{aligned}$$

Здесь  $f_{y'}, f_{z'}$  — компоненты элементарной центробежной силы по осям  $y', z'$  спутника,  $\alpha, \alpha', \alpha''$  — направляющие косинусы орта  $\mathbf{t}$  относительно осей  $x', y', z'$ . Интегрируя по всему объему и учитывая, что  $\beta'\beta'' = -(\alpha'\alpha'' + \gamma'\gamma'')$ , получим  $M_{x'} = -\omega^2(C - B)\beta'\beta''$ . Сравнение с аналогичными формулами (6.1.7) для гравитационного момента, определяемого силовой функцией (6.1.6), приводит к силовой функции (6.3.1) центробежных сил.

Так как суммарная потенциальная энергия не зависит явно от времени (на круговой орбите), то должен иметь место закон сохранения механической энергии

$$T - U - U_\beta = H, \quad (6.3.2)$$

где  $T$  — кинетическая энергия спутника в его относительном вращении,  $H$  — постоянная полная энергия вращательного движения спутника. Учитывая в (6.1.6) то, что  $R = \text{const}$  и при этом  $\mu/R^3 = \omega^2$ , можно записать закон сохранения энергии (6.3.2) в явном виде [6.3]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (A\bar{p}^2 + B\bar{q}^2 + C\bar{r}^2) + \frac{3}{2} \omega^2 (A\gamma^2 + B\gamma'^2 + C\gamma''^2) - \\ - \frac{1}{2} \omega^2 (A\beta^2 + B\beta'^2 + C\beta''^2) = h. \quad (6.3.3) \end{aligned}$$

Здесь  $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$  — компоненты относительной угловой скорости вращения спутника по его главным центральным осям  $x', y', z'$ .

В относительном равновесии относительная угловая скорость равна нулю, а направляющие косинусы могут принимать, как оказывается, либо нулевые, либо единичные по модулю значения. Например, движению

$$\bar{p} = \bar{q} = \bar{r} = 0, \quad \gamma = \gamma' = \beta = \beta'' = 0, \quad \gamma'' = \beta' = 1 \quad (6.3.4)$$

соответствует такое относительное равновесие, когда ось  $z'$

спутника совпадает с направлением радиуса-вектора ( $\gamma'' = \cos(\widehat{z', r}) = 1$ ), а ось  $y'$  — с направлением нормали к плоскости орбиты ( $\beta' = \cos(\widehat{y', n}) = 1$ ). Ось  $x'$  спутника при этом совпадает с касательной к орбите.

Движение (6.3.4) назовем невозмущенным движением, а отклонения от него — возмущениями. При любых возмущениях сохраняется полная энергия (6.3.3) относительного движения; выражение (6.3.3) является первым интегралом уравнений движения (здесь не выписанных; полные уравнения движения см. в книге [6.1]).

Учитывая известные соотношения между направляющими косинусами

$$\gamma''^2 = 1 - \gamma^2 - \gamma'^2, \quad \beta'^2 = 1 - \beta^2 - \beta''^2, \quad (6.3.5)$$

можно выражение (6.3.3) записать так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (A\bar{p}^2 + B\bar{q}^2 + C\bar{r}^2) + \frac{3}{2} \omega^2 \{ (A - C) \gamma^2 + (B - C) \gamma'^2 \} + \\ + \frac{1}{2} \omega^2 \{ (B - A) \beta^2 + (B - C) \beta''^2 \} = h_0. \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

Здесь  $h_0$  — новая постоянная. Она определяется начальными данными  $\bar{p}_0, \bar{q}_0, \bar{r}_0, \gamma_0, \gamma'_0, \beta_0, \beta''_0$ . Левая часть выражения (6.3.6) является квадратичной формой своих переменных. Потребуем, чтобы эта квадратичная форма была определено-положительной. Все коэффициенты этой квадратичной формы будут положительны при выполнении условия

$$B > A > C. \quad (6.3.7)$$

Отсюда сразу следует вывод об устойчивости относительного равновесия (6.3.4). Действительно, так как сумма положительных членов всегда больше какой-либо части этой суммы, то из (6.3.6) при условии (6.3.7) следуют, например, такие оценки:

$$\left. \begin{aligned} \gamma^2 &\leq \frac{2h_0}{3\omega^2(A-C)} < \Delta^2, & \gamma'^2 &\leq \frac{2h_0}{3\omega^2(B-C)} < \Delta^2, \\ \beta^2 &\leq \frac{2h_0}{\omega^2(B-A)} < \Delta^2, & \beta''^2 &\leq \frac{2h_0}{\omega^2(B-C)} < \Delta^2. \end{aligned} \right\} \quad (6.3.8)$$

Здесь  $\Delta^2 < 1$  — какое-то наперед заданное число. Из (6.3.8) следует, что всегда можно выбрать начальные данные ( $h_0$ ) так, чтобы величины  $|\gamma|, |\gamma'|, |\beta|, |\beta'|$  не превосходили наперед заданного сколь угодно малого, значения  $|\Delta|$ , то есть чтобы возмущенное движение

сколь угодно мало отличалось от невозмущенного — относительного равновесия. А это, согласно определению устойчивости по Ляпунову, как раз и доказывает устойчивость невозмущенного движения.

Таким образом, достаточные условия устойчивости относительного равновесия спутника на круговой орбите даются неравенствами (6.3.7). Выбор величины  $h_0$ , обеспечивающей выполнение неравенств (6.3.8), производится следующим образом:

$$h_0 < \min \left\{ \frac{3}{2} \omega^2 (A - C) \Delta^2, \frac{1}{2} \omega^2 (B - A) \Delta^2 \right\}, \quad (6.3.9)$$

то есть  $h_0$  должно быть меньше наименьшего из двух выражений, стоящих в фигурных скобках в (6.3.9). Заметим, что при таком выборе  $h_0$ , согласно (6.3.6), угловые скорости  $p, q, r$  не превзойдут величин порядка  $\omega$ . Это весьма малые величины (для орбит искусственных спутников  $\omega \sim 0,05 \div 0,07$  град/сек, а для Луны  $\omega \sim 0,00015$  град/сек). Иначе говоря, стабилизирующее действие гравитационного поля может сказаться лишь при весьма малой кинетической энергии вращения спутника относительно его центра масс.

Приведенное здесь рассуждение, показывающее устойчивость относительного равновесия, является фактически использованием уже известной нам теоремы А. М. Ляпунова об устойчивости. Напомним ее формулировку: если из переменных возмущенного движения можно образовать определенно-положительную функцию  $V$ , производная  $\dot{V}$  от которой в силу дифференциальных уравнений отрицательная или тождественно равна нулю, то невозмущенное движение устойчиво. В нашем случае функция  $V$  — левая часть равенства (6.3.6); она положительно определена при условии (6.3.7). А так как  $V$  является первым интегралом уравнений движения, то  $\dot{V} \equiv 0$ ; отсюда — устойчивость.

Эта теорема Ляпунова является сильным средством доказательства устойчивости в тех случаях, когда в системе не происходит рассеяние энергии и, следовательно, невозможна асимптотическая устойчивость. Многие задачи динамики космического полета обследованы на устойчивость с помощью этой теоремы или ее модификаций. Большое количество таких задач описано В. В. Румянцевым в книге [6.4].

#### 4. Ринотраденция на орбите

Из условия (6.3.7) следует, что устойчивость относительного равновесия обеспечивается прежде всего отличием спутника (или Луны) от однородного шара. В самом деле, в случае однородного шара  $A = B = C$  и о действии гравитационных моментов говорить не приходится.

Проанализируем условия (6.3.7) подробнее. Максимальный момент инерции  $B$  соответствует оси  $y'$  спутника, которая в относительном равновесии, как мы помним, направлена по нормали  $\mathbf{n}$  к плоскости орбиты. Минимальный момент инерции  $C$  отвечает оси  $z'$  спутника, которая в относительном равновесии направлена вдоль радиуса-вектора орбиты. Геометрия масс твердого тела в механике характеризуется, как известно, центральным эллипсоидом инерции тела, направления осей которого совпадают с главными центральными осями инерции  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  тела, а величины полуосей  $a$ ,  $b$ ,  $c$  связаны с главными центральными моментами инерции  $A$ ,  $B$ ,  $C$  соотношениями

$$a = k/\sqrt{A}, \quad b = k/\sqrt{B}, \quad c = k/\sqrt{C},$$

где  $k$  — некоторая постоянная. Таким образом, максимальному моменту инерции соответствует наименьшая ось эллипсоида инерции, и наоборот.

Резюмируя сказанное, мы можем сформулировать следующее положение, полученное В. В. Белецким в 1956 г. и опубликованное в 1959 г. [6.3]:

*Для устойчивости относительного равновесия твердого тела на круговой орбите в ньютоновском центральном поле сил достаточно, чтобы в невозмущенном движении большая ось центрального эллипсоида инерции тела была направлена по радиусу-вектору орбиты, меньшая ось — по нормали к плоскости орбиты и средняя ось — по касательной к орбите (рис. 6.3).*

Можно сказать, что спутник, если мы хотим обеспечить его гравитационную устойчивость, должен быть изрядно сжат по направлению к плоскости орбиты, более вытянут по направлению движения и уж совсем вытянутым, «длинным» по направлению к Земле.

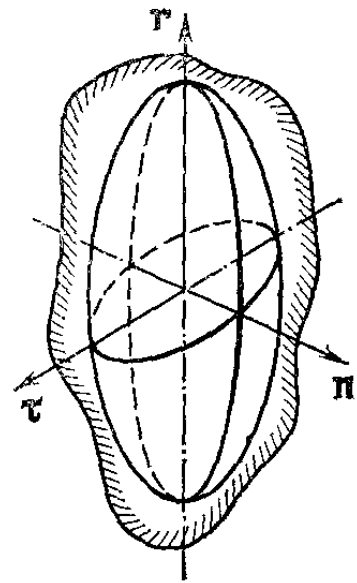
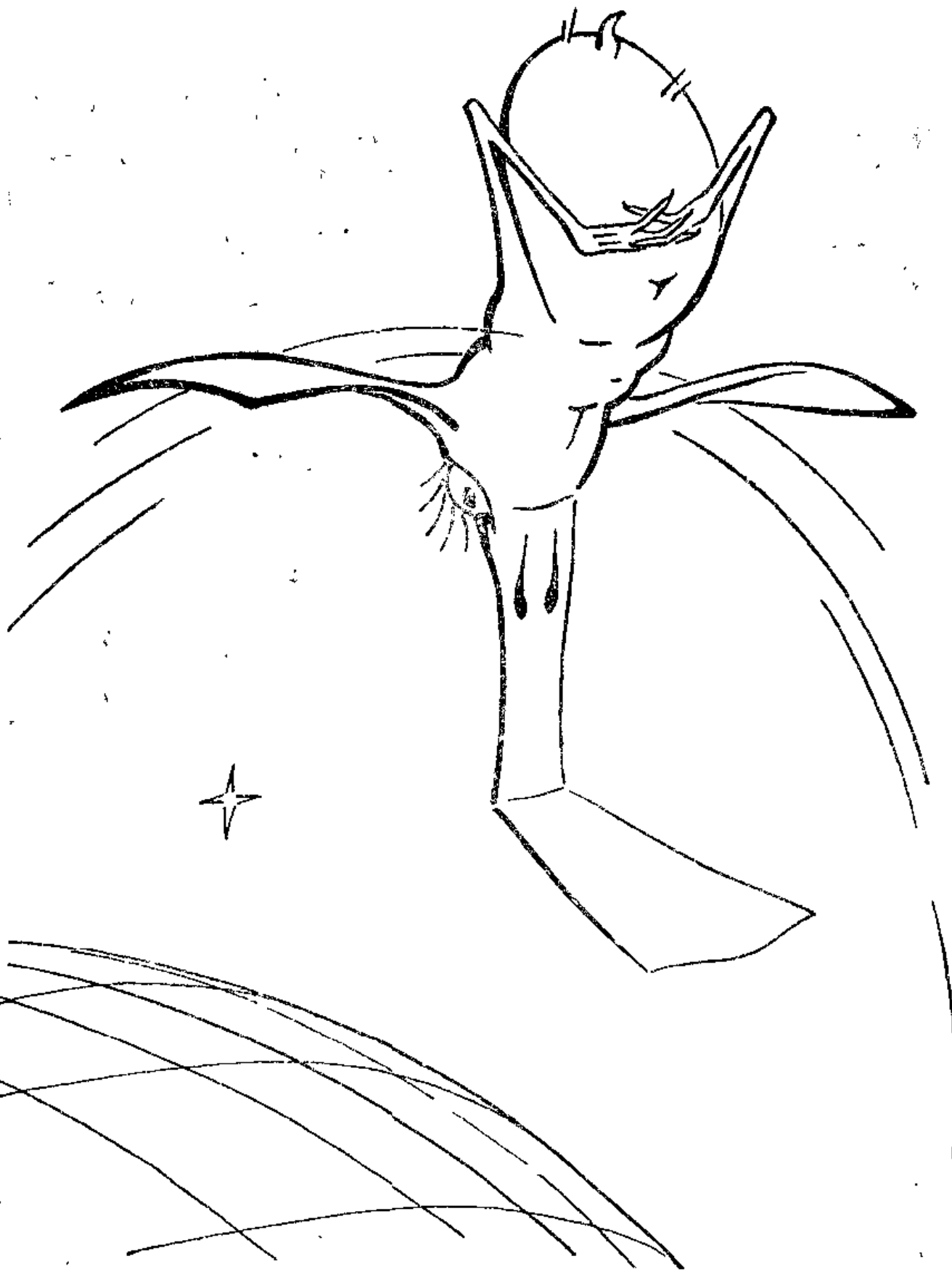


Рис. 6.3. Устойчивое положение эллипсоида инерции спутника на орбите.



Пожалуй, хорошей в этом смысле конструкцией спутника будет конструкция, близкая к форме известного животного *Rhinogradentia Otopteryx volitans*, которое было открыто проф. Х. Штюмпке и описано в его монографии «Строение и жизнь ринограденций» [6.5] (см. также более доступное издание [6.6]).

## 5. 0 пассивкой стабилизации искусственных спутников

Упомянутая выше мимоходом возможность создания гравитационно-стабилизированного спутника является весьма принципиальной. За счет «даровой» гравитационной энергии можно удерживать спутник сколь угодно долго в положении, ориентированном на Землю одной стороной (подобно Луне). Нет нужды говорить, насколько это важно для наблюдений за метеорологической обстановкой, фотографирования земной поверхности и выполнения многих других задач. А. Ю. Ишлинский в своем обзоре [6.18] среди важных достижений механики описал и указанный принцип стабилизации спутника с помощью гравитационных сил.

При практическом осуществлении такой, как говорят, *пассивной* \*) системы стабилизации важно погасить первоначальную, обычно довольно большую, угловую скорость спутника. Требуется ввести угловую скорость в весьма узкий диапазон, в котором «срабатывает» гравитационный захват спутника в ориентированное положение. Поэтому системы гравитационной стабилизации обязательно содержат механизмы демпфирования (гашения) угловых скоростей. У естественных спутников (Луна, спутники Юпитера и Сатурна, перечисленные в начале этого очерка) таким механизмом демпфирования являются моменты сил приливного трения, которые в ходе тысячелетней эволюции «застопорили» вращение Луны и некоторых других небесных тел [6.2]. Демпфирование первоначальных вращений искусственных спутников производится с помощью введения в систему того или иного вида трения, рассеивающего кинетическую энергию вращения.

Для создания систем пассивной стабилизации можно использовать не только гравитационное поле, но и

---

\*) В отличие от активных систем, где стабилизация обеспечивается реактивными двигателями, маховиками и т. п. активными средствами, требующими расхода энергии, запасенной на борту спутника.

стабилизирующее действие аэродинамики, магнитного поля Земли и даже светового давления солнечных лучей.

Впервые система гравитационной стабилизации в СССР предложена в 1956 году Д. Е. Охочимским [6.34]. В литературе можно найти описание систем пассивной стабилизации ряда уже запущенных спутников [6.7, 6.8]. Подробное описание динамики систем пассивной стабилизации содержится в работах В. А. Сарычева ([6.9] и др.).

## 6. Нелинейные колебания

Если спутник вывести из положения относительного равновесия, он будет совершать пространственные колебания около этого положения. Исследование этих колебаний — трудная задача. Очень обычный способ анализа состоит в следующем. Предположим, что угловые отклонения от положения равновесия (и угловые скорости колебаний) весьма малы. Тогда вместо точных уравнений движения можно рассмотреть приближенные, в которых оставлены члены не выше первого порядка малости. Решение этих линейных уравнений движения должно оставаться ограниченным в течение всего бесконечного времени. Ведь если решение не ограничено, то тем самым нарушается исходная предпосылка о малости колебаний. Если же при сколь угодно малых начальных отклонениях ограниченные колебания будут тоже сколь угодно малы, то естественно, казалось бы, заключить, что условия ограниченности линейных колебаний являются условиями устойчивости исходного положения равновесия.

Но с появлением работ А. М. Ляпунова стало ясно, что такие «условия устойчивости», полученные из линейных уравнений, совсем не обязательно являются «настоящими» условиями устойчивости. По линейным уравнениям можно заключить, что исходное невозмущенное движение (равновесие) устойчиво, а на самом деле этого может и не быть. Прекрасной иллюстрацией к сказанному является наша задача о пространственных колебаниях твердого тела (спутника) в гравитационном поле.

Будем рассматривать колебания спутника около положения относительного равновесия на круговой орбите. Тогда условия ограниченности линейных колебаний сводятся [6.1] либо к знакомым уже нам условиям

$$B > A > C, \quad (6.6.1)$$



либо к совокупности условий

$$\left. \begin{aligned} & B < C < A, \\ & \left[ \frac{C}{A} + 3 \left( \frac{B-C}{A} \right) \frac{C}{A} + \left( \frac{B}{A} - 1 \right) \left( \frac{B-C}{A} \right) \right]^2 - \\ & - 16 \frac{C}{A} \left( \frac{B-C}{A} \right) \left( \frac{B}{A} - 1 \right) > 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.6.2)$$

Неравенства (6.6.1), (6.6.2) являются необходимыми условиями устойчивости равновесия. Если оно устойчиво, то условия (6.6.1), (6.6.2) будут выполнены. Но если условия (6.6.1), (6.6.2) выполнены, то движение не обязательно устойчиво. Мы выше доказали, что при выполнении условий (6.6.1) (будем говорить: «в области I») относительное равновесие в самом деле устойчиво. Условия (6.6.1) являются достаточными условиями устойчивости.

Про условия (6.6.2) (определяющие «область II») такого заключения сделать нельзя. Чтобы понять характер движения в этой области (а также чтобы глубже изучить движение и в области I), необходимо рассматривать нелинейные уравнения колебаний. Такие нелинейные эффекты изучались в работе американских ученых Дж. Брэкуэлла и Р. Прингля [6.10]. Кратко опишем метод и результаты их анализа.

Функция, стоящая в левой части равенства (6.3.3), является гамильтонианом нашей задачи и после ряда преобразований может быть сведена к виду

$$\begin{aligned} H = \pm \frac{1}{2} (\xi_1^2 + \omega_1^2 \eta_1^2) + \frac{1}{2} (\xi_2^2 + \omega_2^2 \eta_2^2) + \\ + \frac{1}{2} (\xi_3^2 + \omega_3^2 \eta_3^2) + H^{(1)}(\xi_i, \eta_i). \end{aligned} \quad (6.6.3)$$

Здесь  $\eta_i$  — угловые переменные, описывающие так называемые нормальные колебания, а  $\xi_i$  — соответствующие им импульсы. Выписанная явно часть  $H$  (исключая  $H^{(1)}$ ) как раз соответствует линейным колебаниям, частоты которых суть  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  (они выражаются через моменты инерции спутника). Верхний знак в (6.6.3) и ниже относится к области I (6.6.1), а нижний знак — к области II (6.6.2).

В  $H^{(1)}$  содержатся члены только третьего и более высокого порядка малости относительно  $\xi_i, \eta_i$ . Если этими членами пренебречь, то оставшаяся часть гамильтониана может быть использована для получения линеаризованных уравнений движения. Их решение может быть

записано в виде

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= \pm \frac{\sqrt{2\alpha_1}}{\omega_1} \sin \omega_1 (\tau \pm \beta_1), & \xi_1 &= \sqrt{2\alpha_1} \cos \omega_1 (\tau \pm \beta_1), \\ \eta_2 &= \frac{\sqrt{2\alpha_2}}{\omega_2} \sin \omega_2 (\tau + \beta_2), & \xi_2 &= \sqrt{2\alpha_2} \cos \omega_2 (\tau + \beta_2), \\ \eta_3 &= \frac{\sqrt{2\alpha_3}}{\omega_3} \sin \omega_3 (\tau + \beta_3), & \xi_3 &= \sqrt{2\alpha_3} \cos \omega_3 (\tau + \beta_3). \end{aligned} \right\} \quad (6.6.4)$$

Здесь  $\tau$  — «время», а  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  — постоянные интегрирования.

Заметим, что  $\alpha_i$  пропорциональны квадратам амплитуд колебаний. При этом  $\eta_3(\tau)$  описывает продольные колебания (в плоскости орбиты), а  $\eta_1(\tau)$  и  $\eta_2(\tau)$  — поперечные колебания спутника. Будем теперь искать решение точных уравнений движения, соответствующих полному гамильтониану (6.6.3), в том же виде (6.6.4), где только теперь величины  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  уже не постоянные, а некоторые искомые функции времени. Такой метод вариации постоянных приводит к следующим дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d\alpha_i}{d\tau} = -\frac{\partial H^{(1)}(\alpha_i, \beta_i, \tau)}{\partial \beta_i}, \quad \frac{d\beta_i}{d\tau} = \frac{\partial H^{(1)}(\alpha_i, \beta_i, \tau)}{\partial \alpha_i}. \quad (6.6.5)$$

Здесь под  $H^{(1)}$  подразумевается  $H^{(1)}$  из (6.6.3), куда вместо  $\xi_i, \eta_i$  подставлены их выражения (6.6.4).

Эти хорошо известные в классической механике уравнения (см., например, [6.11]) удобны для исследования: они имеют канонический вид. Если  $H^{(1)} \equiv 0$ , то из (6.6.5) сразу следует  $\alpha_i = \text{const}$ ,  $\beta_i = \text{const}$ , что отвечает линейным колебаниям (6.6.4). При любом  $H^{(1)} \neq 0$  решение уравнений (6.6.5) сразу покажет в явном виде отличие нелинейных колебаний от линейных.

Если колебания не очень сильно отличаются от линейных, то  $H^{(1)}$  мало и к исследованию уравнений (6.6.5) можно применить асимптотический метод — метод осреднения. Оказывается тогда, что среднее значение  $\overline{H^{(1)}} =$

$$= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} H^{(1)} d\tau = 0, \text{ если только между частотами } \omega_i$$

не выполняются резонансные соотношения

$$\sum_{i=1}^3 n_i \omega_i = 0,$$

где  $n_i$  — любые целые числа (одно из  $n_i$  может быть равно нулю). Иначе говоря, формулы (6.6.4) с постоянными  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  с большой точностью описывают истинное движение вне окрестности любых резонансных соотношений. Однако вблизи резонансов это не так; среднее значение  $H^{(1)}$  не равно нулю.

Оставим в  $H^{(1)}$  члены только третьего порядка малости. Тогда выявляется возможность следующих резонансов третьего порядка:

$$(I) \quad \omega_3 = 2\omega_1, \quad (II) \quad \omega_3 = \omega_2 - \omega_1, \quad (III) \quad \omega_3 = \omega_2 + \omega_1. \quad (6.6.6)$$

Других резонансов третьего порядка быть не может. Движение в окрестности резонансов (6.6.6) обследовано в цитируемой работе [6.10].

Рассмотрим, например, резонанс типа I из (6.6.6). Пусть  $\varepsilon = \omega_3 - 2\omega_1$  — «расстройка» резонансного соотношения I. Тогда уравнения (6.6.5) в  $\varepsilon$ -окрестности резонанса типа I из (6.6.6) в первом приближении (в смысле метода осреднения) имеют следующие первые интегралы:

$$\alpha_2 = \text{const}, \quad \beta_2 = \text{const}, \quad (6.6.7)$$

$$H^* = a \frac{2\omega_1}{\omega_2} \alpha_1^* \sqrt{\alpha_3} \cos \omega_3 (\beta_3 \mp \beta_1^*) \mp \frac{\varepsilon}{\omega_3} \alpha_1^* = \text{const}, \quad (6.6.8)$$

$$C = \alpha_1^* \pm \alpha_3 = \text{const}, \quad (6.6.9)$$

где обозначено:

$$\alpha_1^* = \alpha_1 \frac{\omega_3}{2\omega_1}, \quad \beta_1^* = \frac{2\omega_1 \beta_1 \mp \varepsilon \tau}{\omega_3}.$$

Постоянная  $a$  в (6.6.8) зависит только от моментов инерции. Пусть  $\Phi = \omega_3 (\beta_3 \mp \beta_1^*)$ . Тогда из (6.6.8) и (6.6.9)

$$\cos \Phi = \frac{h_0 \pm \varepsilon_0 \alpha_1^*}{\alpha_1^* \sqrt{\pm (C - \alpha_1^*)}}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2a\omega_1}. \quad (6.6.10)$$

Здесь  $h_0$  — постоянная интегрирования, пропорциональная  $H^*$ .

Уравнение (6.6.10) дает возможность построить интегральные кривые в плоскости  $\alpha_1^*(\Phi)$  и исследовать движение. Рассмотрим сначала область I, отвечающую (6.6.1) (верхний знак в (6.6.10)). На рис. 6.4 построены интегральные кривые для двух случаев:  $|\varepsilon_0| > \sqrt{C}$  и  $|\varepsilon_0| < \sqrt{C}$ .

В первом случае, как видим, малые колебания «амплитуды»  $\alpha_1^*$  сначала остаются малыми. Это вполне естественно, так как неравенство  $|\varepsilon_0| > \sqrt{C}$  означает, что движение не близко к резонансному; следовательно, оно должно мало отличаться от линейного случая (то есть от случая  $\alpha_1^* = \text{const}$ ). Наоборот, если расстройка  $|\varepsilon_0|$  достаточно мала ( $|\varepsilon_0| < \sqrt{C}$ , движение близко к резонансному), то первоначально малое значение  $\alpha_1^*$ , как видно из рис. 6.4, б, становится с течением времени существенным (если только  $C \approx \alpha_3^0$  не очень мало).

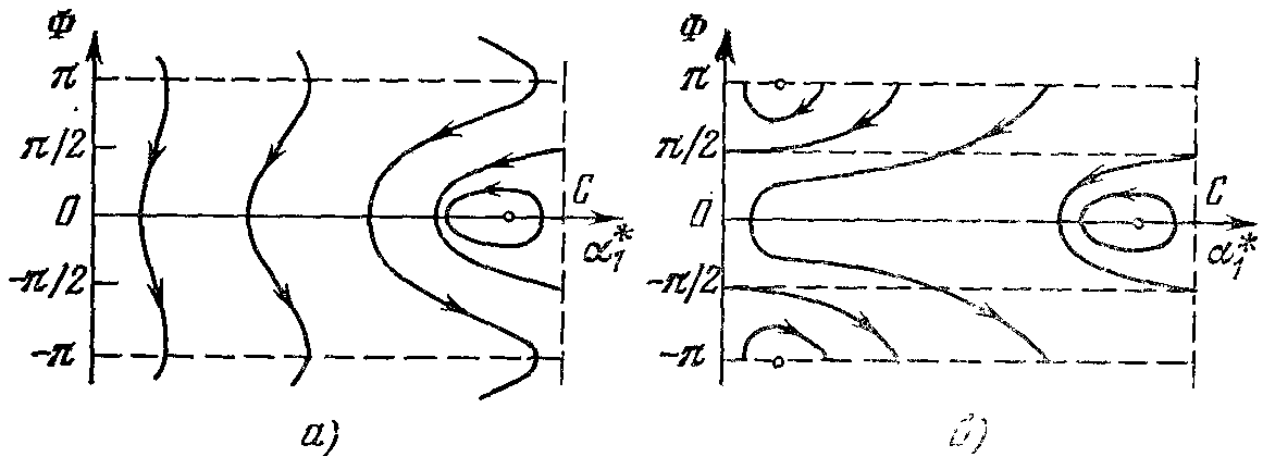


Рис. 6.4. Амплитудно-фазовая характеристика движения в области I (достаточных условий устойчивости): а) нерезонансный случай; б) резонанс.

Иначе говоря, в резонансном случае начальные отклонения от положения равновесия в плоскости орбиты вызывают большие отклонения первоначально малых углов поперечных колебаний. В силу интеграла (6.6.9) происходит «перекачка» колебаний из плоскости орбиты в поперечные, затем обратная перекачка и т. д. Этот факт впервые выявил численным интегрированием точных уравнений движения американский ученый Т. Р. Кэйн [6.12]. (После этого и появилась работа [6.10] Брэкуэлла и Прингля, объясняющая обнаруженные Кэйном эффекты.)

На рис. 6.5 и 6.6, заимствованных из [6.12], приводятся изменения со временем угла, описывающего поперечные колебания спутника. Начальные данные одинаковы для обоих рисунков, но рис. 6.5 отвечает резонансному случаю, а рис. 6.6 — нерезонансному. Если во втором случае амплитуда колебаний не превосходит  $0,5^\circ$ , то в первом случае  $20^\circ$ !

Такова роль резонанса. Следует, однако, подчеркнуть, что наличие рассмотренной резонансной раскачки

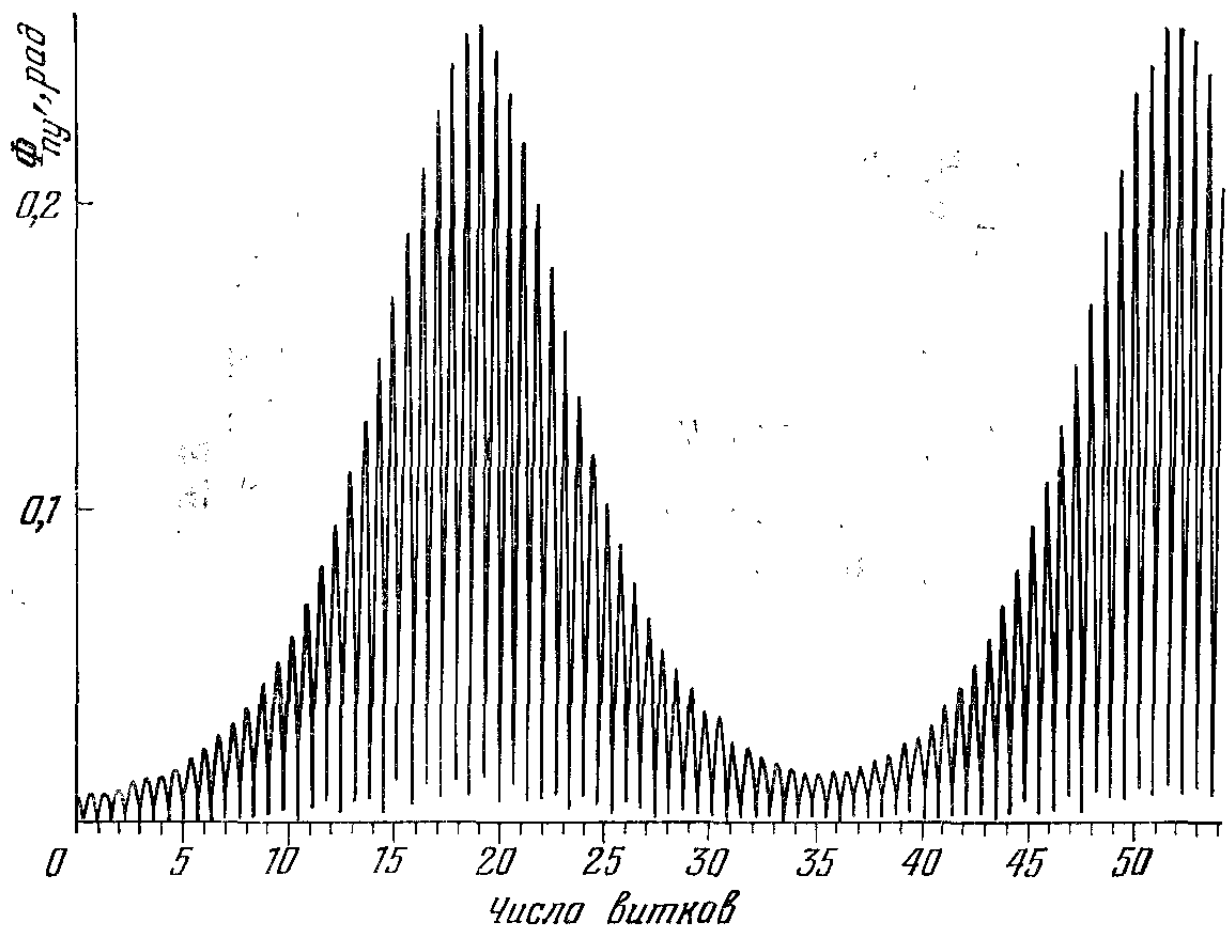


Рис. 6.5. Поперечные колебания на круговой орбите в резонансном случае.

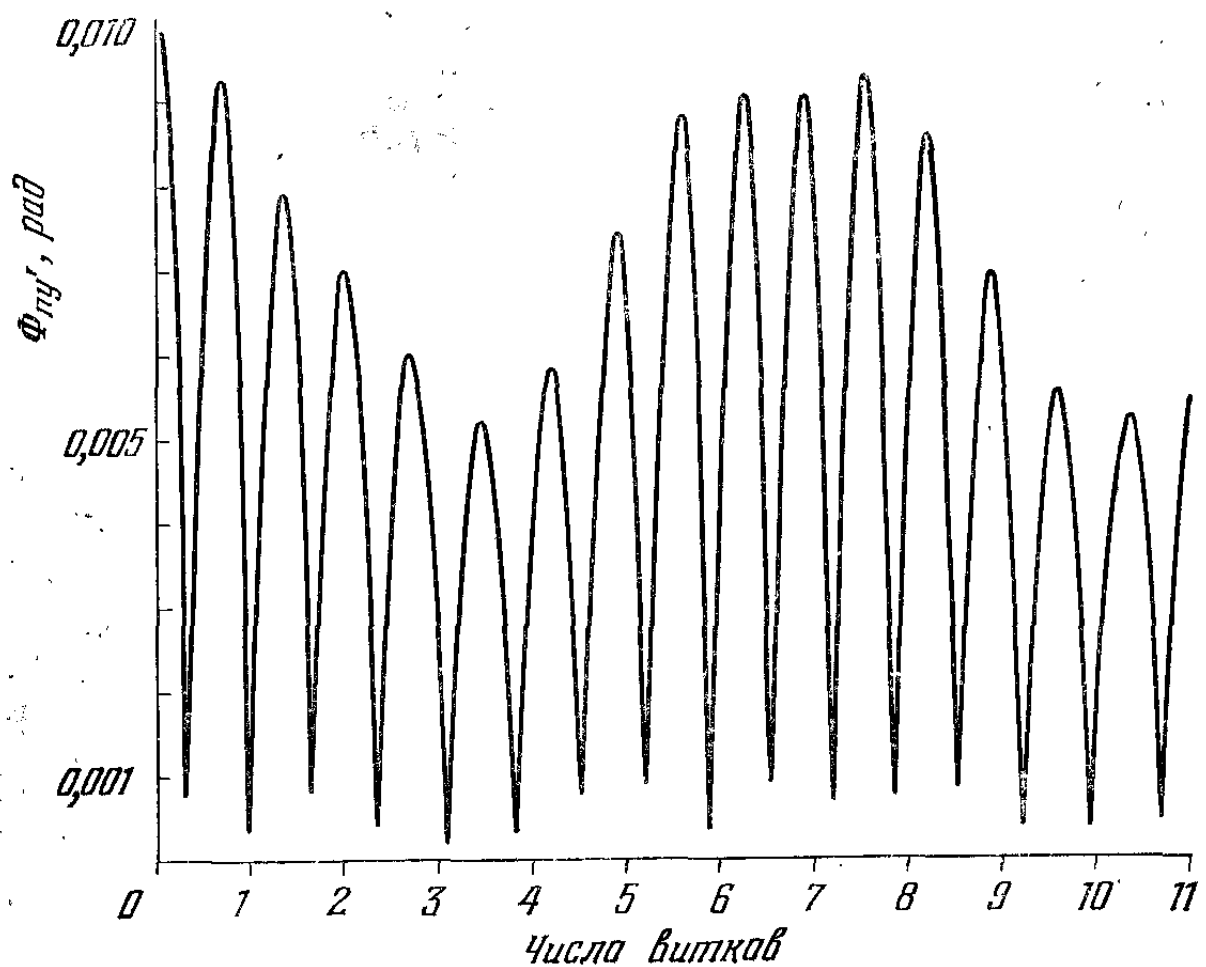


Рис. 6.6. Поперечные колебания на круговой орбите в нерезонансном случае.

колебаний не нарушает, разумеется, ранее доказанной устойчивости по Ляпунову относительного равновесия спутника. В самом деле, как в резонансном, так и в нерезонансном случае всегда можно выбрать в (6.3.6) и (6.3.8) столь малое  $h_0$ , что амплитуды колебаний не превзойдут наперед заданной величины. Только в резонансном случае этот выбор гораздо более жестко обусловлен, чем в нерезонансном.

А теперь обратимся к области II выполнения необходимых условий (6.6.2) устойчивости. В формуле (6.6.10) в этом случае надо брать нижние знаки. Соответствующие «амплитудно-фазовые портреты» движения изображены на рис. 6.7, а и б. Оказывается, как и раньше, при достаточно больших отклонениях от резонанса ( $|\varepsilon_0| > \sqrt{|C|}$ )

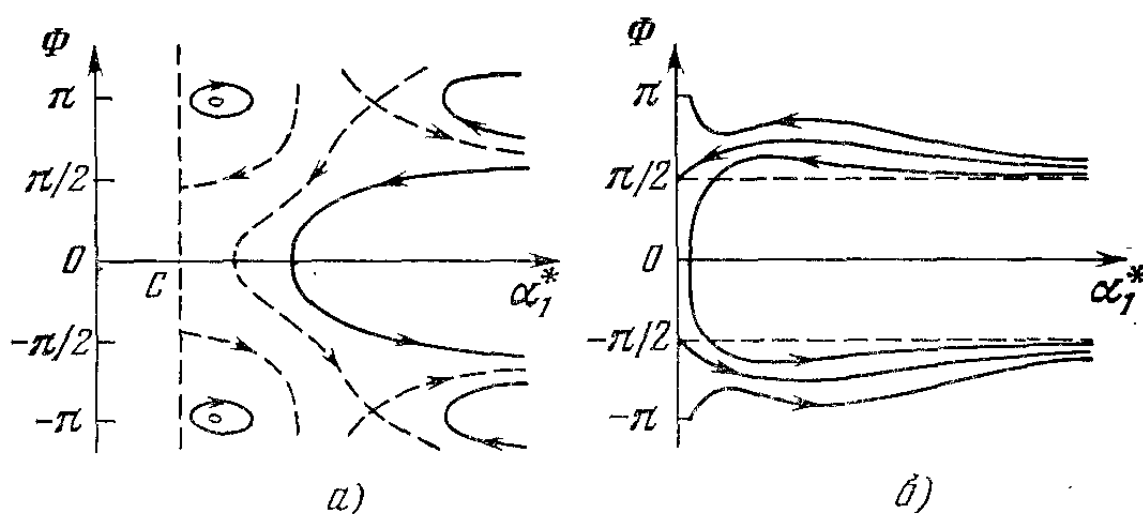


Рис. 6.7. Амплитудно-фазовая характеристика движения в области II (необходимых условий устойчивости): а) нерезонансный случай,  $|\varepsilon_0| > \sqrt{|C|}$ ; б) резонансный случай,  $|\varepsilon_0| < \sqrt{|C|}$ .

движение может оставаться ограниченным (рис. 6.7, а). Но при попадании в окрестность резонанса ( $|\varepsilon_0| < \sqrt{|C|}$ ) движение становится неограниченным (рис. 6.7, б)! В этом качественное отличие движения при выполнении условий (6.6.2) (необходимых) от движения при выполнении условий (6.6.1) (достаточных).

Лучше всего результаты анализа, изображенные на рис. 6.7, трактовать так. Сколь бы мала ни была расстройка  $|\varepsilon_0| \neq 0$  между частотами, всегда можно найти такие начальные данные ( $\sqrt{|C|} < |\varepsilon_0|$ ), что движение будет ограниченным; таких начальных данных нельзя найти только при  $|\varepsilon_0| = 0$ , то есть строго на резонансе. При строгом резонансе ( $|\varepsilon_0| = 0$ ) движение (в области II)

обязательно не ограничено (в нашем приближении). При этом, в силу интеграла (6.6.9), одновременно возрастают и продольные, и поперечные колебания. Все сказанное позволяет заключить, что при выполнении лишь необходимых условий устойчивости (6.6.2) движение действительно устойчиво, если только частоты не удовлетворяют резонансному соотношению, но в случае резонансного соотношения между частотами устойчивость может исчезнуть и превратиться в неустойчивость.

Этот вывод носит, конечно, приближенный характер (из-за приближенности анализа). Однако математические работы последних лет [6.13, 6.14] позволяют сделать аналогичное заключение строго. Оказывается, при выполнении лишь необходимых условий устойчивости, когда старшие члены гамильтониана (6.6.3) образуют квадратичную форму, не являющуюся определенно-положительной, равновесие может быть *неустойчивым*, если частоты линейных колебаний строго подчиняются резонансному соотношению нечетного порядка.

Итак, устойчивость, обнаруженная с помощью линейных уравнений, должна быть еще доказана (построением функции Ляпунова, например). Иначе эта устойчивость может оказаться обманчивой. Она может нарушиться при резонансе. Анализ колебаний спутника около положения относительного равновесия убедительно это демонстрирует.

Заметим, что для практических задач стабилизации спутников имеет значение лишь область I (6.6.1) достаточных условий устойчивости. Введение диссипативных сил превращает здесь устойчивость в асимптотическую. А в области II (6.6.2) диссипативные силы разрушают устойчивость и уводят спутник от положения равновесия, удовлетворяющего (6.6.2).

## 7. Быстрые вращения

Гравитационный «захват» спутника в режим колебаний около положения относительного равновесия возможен, как уже объяснялось, лишь при довольно малой угловой скорости спутника из-за сравнительной «слабости» гравитационных моментов.

Ну, а если начальная угловая скорость спутника, как это обычно и бывает, сравнительно велика? Тогда действие моментов внешних сил (гравитационных, например)

настолько слабо меняет исходное вращение спутника, что в грубом приближении можно считать это исходное вращение неизменным, происходящим по инерции. Вращение твердого тела по инерции вокруг центра масс хорошо изучено в классической механике — это так называемое «движение Эйлера — Пуансо». Однако моменты внешних сил оказывают хотя и малое, но систематическое, постоянно действующее возмущение. В результате этих возмущений малые изменения в исходном вращении спутника, накапливаясь с течением времени, могут существенно изменить движение по сравнению с первоначальным. Отсюда ясна задача: исследовать эволюцию движения Эйлера — Пуансо под влиянием малых моментов возмущающих сил (подобно тому как

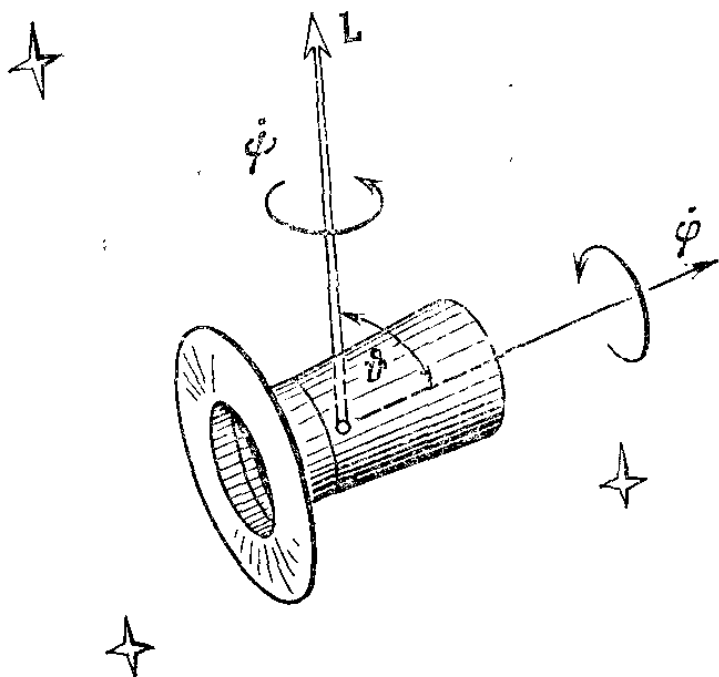


Рис. 6.8. Регулярная прецессия.

в теории орбит исследуется эволюция кеплеровских траекторий под влиянием малых возмущающих сил).

Движение Эйлера — Пуансо (которое иногда будем называть «невозмущенным движением») очень просто описывается для частного, но важного практически случая, когда спутник представляет собой *динамически-симметричное тело*. Это значит, что из трех главных центральных моментов инерции спутника два равны между собой. Пусть, например,  $A = B \neq C$ . Ось момента инерции  $C$  назовем *осью динамической симметрии* или *продольной осью спутника*. Будем в дальнейшем опираться именно на этот простой случай. Невозмущенное движение Эйлера — Пуансо для динамически-симметричного тела, как известно из теоретической механики, является *регулярной прецессией*. Опишем это движение (рис. 6.8).

Если  $p, q, r$  — компоненты абсолютной угловой скорости спутника по главным центральным осям инерции  $x', y', z'$ , то *вектором кинетического момента*  $\mathbf{L}$  будет вектор с компонентами  $Ap, Bq, Cr$ , по тем же осям. При этом продольной осью является ось  $z'$ . Оказывается,

постоянно действующее возмущение. В результате этих возмущений малые изменения в исходном вращении спутника, накапливаясь с течением времени, могут существенно изменить движение по сравнению с первоначальным. Отсюда ясна задача: исследовать эволюцию движения Эйлера — Пуансо под влиянием малых моментов возмущающих сил (подобно тому как



что в движении Эйлера — Пуансо вектор кинетического момента  $\mathbf{L}$  постоянен по величине и направлению в абсолютном пространстве ( $\mathbf{L} \equiv \text{const}$ ). В регулярной прецессии компонента вектора  $\mathbf{L}$  по продольной оси спутника постоянна:  $Cr = Cr_0$ . Ось симметрии спутника обходит вектор кинетического момента на постоянном угловом расстоянии  $\vartheta$  с постоянной угловой скоростью  $\dot{\psi}$ ; одновременно спутник «кружится» вокруг своей продольной оси с постоянной угловой скоростью  $\dot{\phi}$ . Спутник «вальсирует» \*) вокруг вектора кинетического момента, подобно неутомимому танцору, кружащемуся в зале.

Угол  $\vartheta$  назовем *углом нутации*, угловые скорости  $\dot{\psi}$  и  $\dot{\phi}$  — соответственно *скоростями прецессии и собственного вращения*. Положение вектора кинетического момента в пространстве можно задать двумя постоянными углами:  $\rho$  и  $\sigma$ . Тогда регулярная прецессия описывается шестью параметрами

$$L, \rho, \sigma, \vartheta, \psi, \phi, \quad (6.7.1)$$

из которых четыре первых постоянны, а два последних равномерно меняются со временем (с постоянными скоростями  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\phi}$ ).

«Включим» теперь действие моментов возмущающих сил. Тогда четыре первых параметра (6.7.1) уже не будут, вообще говоря, оставаться постоянными, зависимости  $\phi$  и  $\psi$  от времени будут отличаться от линейных. Задача состоит теперь в том, чтобы выяснить, как именно меняются (эволюционируют) со временем параметры (6.7.1) под действием возмущающих моментов. Наши параметры (6.7.1) аналогичны оскулирующим элементам в динамике орбит, и прежде всего для параметров (6.7.1) нужно составить дифференциальные уравнения «в оскулирующих элементах».

Рассмотрим, например, возмущения, обусловленные гравитационным потенциалом (6.1.6). Входящие в него величины  $\gamma$ ,  $\gamma'$ ,  $\gamma''$  надо выразить через наши новые переменные (6.7.1). Оказывается, для случая  $A = B$  потенциал не будет зависеть от  $\phi$ , так что

$$U = U(\rho, \sigma, \vartheta, \psi, \omega_0 t). \quad (6.7.2)$$

\*) Термин «вальсирует» применительно к вращению спутника несколько лет тому назад пустил в ход Нам Тум По, бывший тогда аспирантом Ленинградского государственного университета.

Явная зависимость  $U$  от времени вызвана перемещением спутника по орбите со средней угловой скоростью  $\omega_0$ , а в случае некруговой орбиты — также и тем, что значение текущего радиуса вектора  $R$ , входящее в выражение (6.1.6) для  $U$ , тоже будет функцией (периодической) от  $t$ :  $R = R(\omega_0 t)$ . Потенциал  $U$  является  $2\pi$ -периодической функцией по каждому из своих аргументов, так что, например,  $U(\psi + 2\pi) = U(\psi)$ ,  $U(\omega_0 t + 2\pi) = U(\omega_0 t)$  и т. д.

Оказывается, что уравнения «в оскулирующих элементах» в рассматриваемом случае имеют, как было выведено В. В. Белецким в 1962 г., следующий вид [6.15, 6.1]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial \psi}, & \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{1}{L \sin \rho} \frac{\partial U}{\partial \rho}, \\ \frac{d\rho}{dt} &= \frac{1}{L \sin \rho} \left( \frac{\partial U}{\partial \psi} \cos \rho - \frac{\partial U}{\partial \sigma} \right), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{L}{A} - \frac{1}{L} \left( \frac{\partial U}{\partial \rho} \operatorname{ctg} \rho + \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \operatorname{ctg} \vartheta \right), \\ \cos \vartheta &= Cr_0/L. \end{aligned} \right\} \quad (6.7.3)$$

Эти уравнения верны не только в случае гравитационных возмущений, но и для любых возмущений, обладающих силовой функцией типа (6.7.2). (При определенных условиях к таким возмущениям относятся аэродинамические и магнитные моменты, моменты сил светового давления.) Уравнение для  $\varphi$  в (6.7.3) не выписано, так как правые части от  $\varphi$  не зависят и уравнение для  $\varphi$  можно интегрировать отдельно (простой квадратурой, после того как будет проинтегрирована система (6.7.3)).

Итак, задача сводится к интегрированию системы (6.7.3) четырех дифференциальных уравнений первого порядка (с учетом конечного соотношения (6.7.4)).

Если возмущающих моментов нет, то  $U \equiv 0$  и уравнения (6.7.3) дают  $L = L_0$  (из (6.7.4) тогда следует  $\vartheta = \vartheta_0$ ),  $\rho = \rho_0$ ,  $\sigma = \sigma_0$ ,  $\dot{\psi} = \frac{L_0}{A} \equiv \dot{\psi}_0$ , что как раз отвечает невозмущенному движению — регулярной прецессии. Будем считать, что существуют малые возмущения  $U$ ; малость возмущений определим тем, что  $\frac{L}{A} \gg \frac{\max |U|}{L}$ ; тогда в уравнениях (6.7.3) переменные  $L$ ,  $\rho$ ,  $\sigma$  будут медленными, а переменная  $\psi$  — быстрой в смысле асимптотических методов, и для исследования этих уравнений удобно применить уже известный нам метод осреднения по быстрой

переменной. Заметим, что уравнения (6.7.3) содержит вообще-то две быстрые переменные:  $\psi$  и  $\tau = \omega_0 t$ . Но обычно  $\psi$  изменяется со скоростью порядка  $1 \div 10$  град/сек, а  $\tau$  — со скоростью порядка  $0,05 \div 0,07$  град/сек, поэтому легко допустить, что переменные  $\psi$  и  $\tau$  не резонируют (то есть частоты  $\psi_0$  и  $\omega$  несоизмеримы), и можно провести осреднение только по  $\psi$ .

Пусть

$$\bar{U} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U d\psi. \quad (6.7.5)$$

Учтем, что в силу периодической зависимости  $U$  от  $\psi$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial U}{\partial \psi} d\psi = \frac{1}{2\pi} \{U(2\pi) - U(0)\} = 0.$$

Тогда система (6.7.3) и равенство (6.7.4) немедленно дают соотношения

$$L = L_0, \quad \cos \vartheta = \cos \vartheta_0, \quad (6.7.6)$$

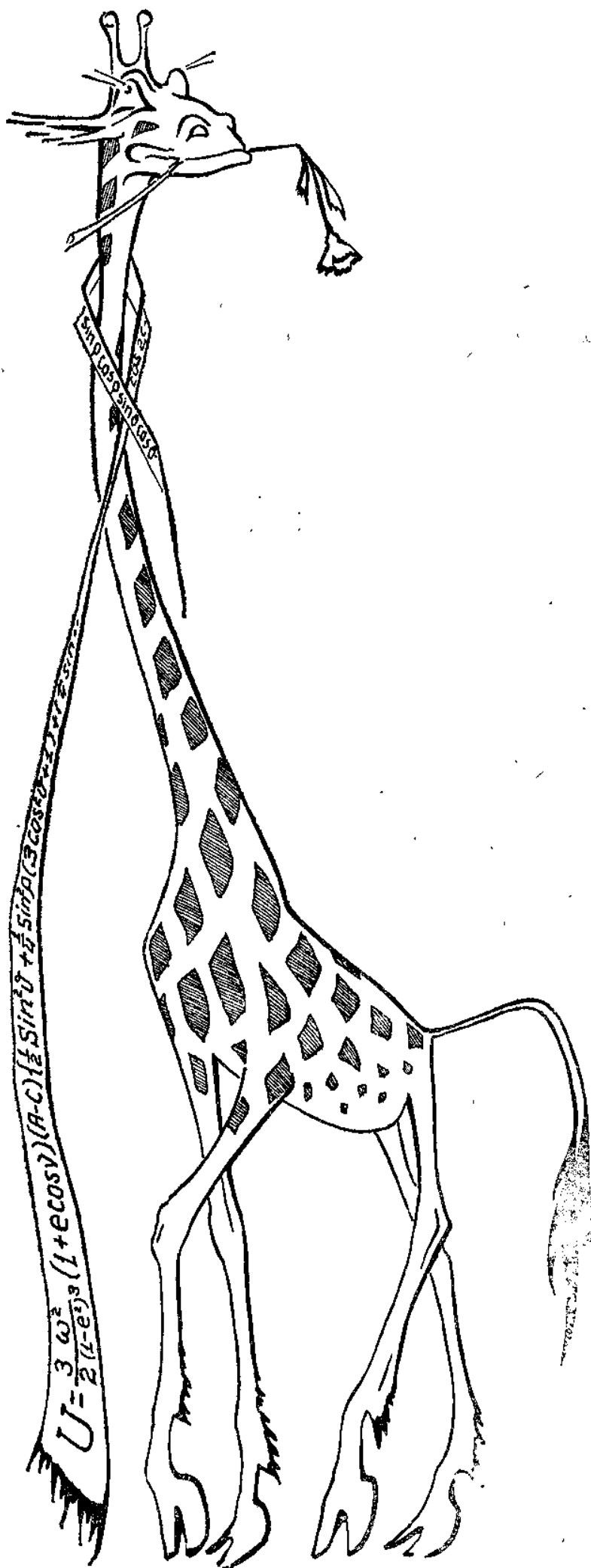
$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{L_0}{A} - \frac{1}{L_0} \left\{ \frac{\partial \bar{U}}{\partial \rho} \operatorname{ctg} \rho + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \vartheta} \operatorname{ctg} \vartheta \right\} \quad (6.7.7)$$

и каноническую систему двух дифференциальных уравнений

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{L_0 \sin \rho} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \sigma}, \quad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{L_0 \sin \rho} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \rho}. \quad (6.7.8)$$

Таким образом, задача свелась к интегрированию всего двух уравнений (6.7.8), после чего из (6.7.7) можно определить скорость возмущенной прецессии (вместе с малой добавкой, стоящей в скобке в (6.7.7)). Главный же вывод, который следует из (6.7.6) — (6.7.8), таков [6.16, 6.15]:

Возмущенное движение динамически-симметричного спутника в потенциальном силовом поле (6.7.2) является квазирегулярной (то есть почти регулярной) прецессией с измененной скоростью прецессии (6.7.7), вращающей ось симметрии спутника на постоянном угловом расстоянии  $\vartheta_0$  вокруг постоянного по величине вектора  $\mathbf{L}$  кинетического момента. Основное влияние возмущений заключается в изменении направления вектора  $\mathbf{L}$



в пространстве. Это изменение описывается уравнениями (6.7.8).

Говоря проще и короче, «фигура вальсирования» спутника, изображенная на рис. 6.8, усложняется лишь за счет медленного изменения направления вектора  $L$ . На рис. 6.9

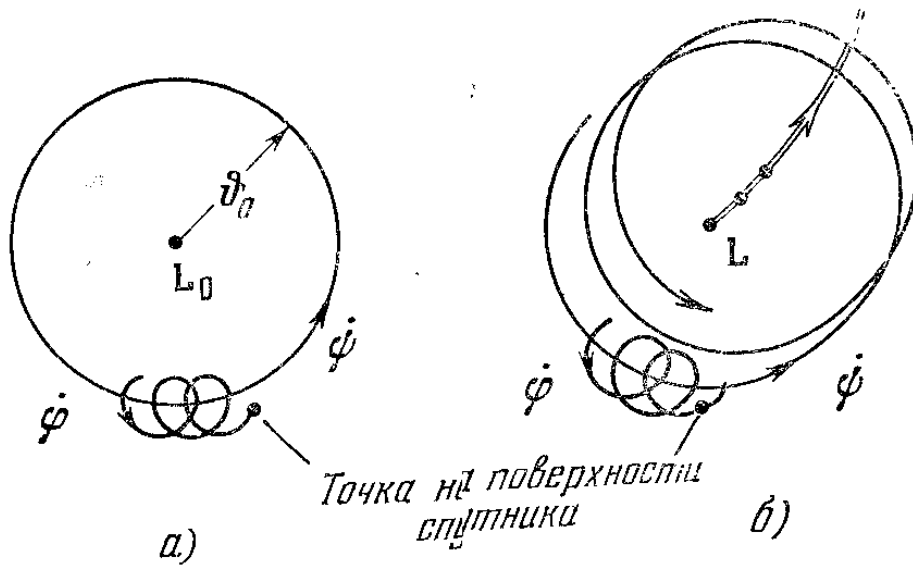


Рис. 6.9. «Фигуры вальсирования»: а) невозмущенное движение; б) возмущенное движение.

схематично изображены обе, невозмущенная и возмущенная, «фигуры вальсирования».

Основные уравнения (6.7.8) возмущенного движения назовем эволюционными уравнениями.

## 8. Автор слегка припугнет читателя

Автор считает эволюционные уравнения (6.7.8) весьма изысканными. Не столько даже из-за их формы, сколько из-за того, что все возмущенное движение фактически вытекает из этих двух простых (а потому и красивых) уравнений.

Однако красота эта обманчива. Ведь прежде чем пользоваться этими уравнениями, нужно в явном виде выписать формулу (6.7.2) силовой функции  $U$ . Это вовсе не простая формула, а, наоборот, довольно громоздкая. Механику-исследователю в своей работе приходится иметь дело и с громоздким, и с неизящным аппаратом — увы, необходимым для получения истины.

С исключительной целью приближения читателя к пониманию этого факта автор выпишет здесь выражение (6.7.2) в явном виде. Вот оно: если в (6.1.6) оставить члены, существенные для исследования движения около

центра масс, и положить  $A = B$ , то

$$U = \frac{3}{2} \frac{\omega_0^2}{(1-e^2)^3} (1 + e \cos v)^3 (A - C) \gamma''^2, \quad (6.8.1)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma''^2 = & \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta + \frac{1}{4} \sin^2 \rho (3 \cos^2 \vartheta - 1) + \\ & + \frac{1}{4} \sin^2 \rho (3 \cos^2 \vartheta - 1) \cos 2(v - \sigma) + \\ & + \sin \rho \cos \rho \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \psi + \frac{1}{4} \sin^2 \vartheta \sin^2 \rho \cos 2\psi + \\ & + \frac{1}{2} \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \rho (1 + \cos \rho) \sin (\psi - 2v + 2\sigma) - \\ & - \frac{1}{2} \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \rho (1 - \cos \rho) \sin (\psi + 2v - 2\sigma) - \\ & - \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta (1 + \cos \rho)^2 \cos (2\psi - 2v + 2\sigma) - \\ & - \frac{1}{8} \sin^2 \vartheta (1 - \cos \rho)^2 \cos (2\psi + 2v - 2\sigma); \end{aligned}$$

причем истинная аномалия  $v$  связана с безразмерным временем  $\tau = \omega_0 t$  формулой

$$\tau = 2 \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{e \sqrt{1-e^2}}{1+e \cos v} \sin v. \quad (6.8.2)$$

В формулах (6.8.1), (6.8.2)  $e$  — эксцентриситет орбиты,  $\omega_0 = \mu^{1/2} a^{-3/2}$  — среднее движение по орбите с большой полуосью  $a$ . Углы  $\rho$  и  $\sigma$  выбраны здесь вполне конкретным образом:  $\rho$  — угол между вектором  $\mathbf{L}$  кинетического момента и нормалью  $\mathbf{n}$  к плоскости орбиты,  $\sigma$  — угол, отсчитываемый в плоскости орбиты от направления на перицентр орбиты до проекции вектора  $\mathbf{L}$  на плоскость орбиты.

Я надеюсь, что, взглянув на (6.8.1), (6.8.2), читатель «отделался легким испугом». Если бы я хотел припугнуть читателя сильнее, то выписал бы в явном виде выражение  $U$  для трехосного ( $A \neq B \neq C$ ) тела \*).

\*) Быстрые перезонаансные вращения трехосного спутника в гравитационном поле исследовал Ф. Л. Черноусько [6.17].

## 9. Возмущенное движение в явном виде

Чтобы из выражения (6.8.1) для  $U$  получить выражение  $\bar{U}$ , входящее в эволюционные уравнения (6.7.8), надо из (6.8.1) просто «повыбрасывать» все члены, содержащие множителем тригонометрические функции от  $\psi$ . Ведь именно эти члены «съедаются» осреднением (6.7.5). Проведя такую операцию, увидим, что  $\bar{U}$  будет уже гораздо проще выглядеть, однако, остается явная зависимость  $\bar{U}$  от времени (через  $\nu$ ); в силу этого досадного факта уравнения (6.7.8) неинтегрируемы.

Из этого положения есть два выхода:

1) частный: в случае круговой орбиты ( $e = 0$ ) уравнения (6.7.8) приводятся к интегрируемому виду подстановкой  $\nu = \nu - \sigma$  [6.1, 6.15];

2) общий: для любой орбиты можно считать  $\tau$  быстрой переменной и снова применить к уравнениям (6.7.8) асимптотический метод, осредняя правые части уравнений по  $\tau$ .

Применим второй путь исследования. Тогда в уравнения (6.7.8) надо вместо  $\bar{U}$  подставить

$$\tilde{U} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{U} d\tau = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} U d\psi d\tau.$$

Вычислять этот интеграл удобно заменой переменной  $\tau$  на  $\nu$ : ведь  $\bar{U}$  явно зависит от  $\nu$ , а

$$d\tau = \frac{d\tau}{d\nu} d\nu = \frac{(1-e^2)^{3/2}}{(1+e \cos \nu)^2} d\nu.$$

Проведя такую операцию над  $U$ , из (6.8.1) получим

$$\begin{aligned} \tilde{U} = & \frac{3}{2} \frac{\omega_0^2}{(1-e^2)^{3/2}} (A-C) \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta + \frac{1}{4} \sin^2 \rho (3 \cos^2 \vartheta - 1) \right\}. \end{aligned} \quad (6.9.1)$$

Подставляя (6.9.1) в (6.7.8) (вместо  $\bar{U}$ ), сразу получим [6.16, 6.1]

$$\rho = \rho_0, \quad \frac{d\sigma}{d\tau} = \frac{3}{4} \frac{(A-C) \omega_0}{L_0 (1-e^2)^{3/2}} (3 \cos^2 \vartheta_0 - 1) \cos \rho_0. \quad (6.9.2)$$

Постоянство угла  $\rho$  следует из первого уравнения (6.7.8) потому, что  $\tilde{U}$  не зависит от  $\sigma$ : члены с  $\sigma$  в (6.8.1)

все пропадут после двух осреднений. Таким образом, возмущенное движение вектора кинетического момента в гравитационном поле очень простое. Вектор кинетического момента прецессирует вокруг нормали  $\mathbf{n}$  к плоскости орбиты на постоянном угловом расстоянии  $\rho_0$  от нее и с постоянной угловой скоростью (6.9.2). Напомним, что вокруг вектора кинетического момента спутник «вытанцовывает» регулярную прецессию (6.7.6) — (6.7.7), причем в (6.7.7) теперь  $\bar{U}$  надо заменить на  $\bar{U}$ ; окажется, что угловая скорость прецессии  $\dot{\psi}$  будет строго постоянной.

Если невозмущенное движение есть просто вращение вокруг оси симметрии (частный случай регулярной прецессии), то  $\vartheta_0 = 0$  и  $L = Cr_0$ ; именно такой случай рассматривается в классической небесной механике (прецессия земной оси под влиянием солнечного и лунного притяжений). Формула (6.9.2) в этом частном случае превращается в классическую формулу скорости прецессии земной оси. Известно, что период этой прецессии ни много, ни мало — 26 000 лет. Однако для искусственных спутников эффекты куда более «весомы, грубы, зримы»: период прецессии вектора кинетического момента, вычисленный по (6.9.2), составляет всего лишь несколько суток.

## 10. «Пегас»

Но за несколько суток изрядно изменится и сама орбита спутника, а мы это пока никак не учли. В самом деле, в первых очерках было показано, что за счет сжатия Земли плоскость орбиты поворачивается (прецессирует) вокруг оси Земли со скоростью

$$\frac{d\Omega}{d\tau} = -\frac{\bar{\varepsilon}R_0^2}{p^2} \cos i \equiv K_\Omega \quad (6.10.1)$$

(это скорость движения восходящего узла  $\Omega$  орбиты) и, кроме того, орбита поворачивается в собственной плоскости со скоростью

$$\frac{d\omega_\pi}{d\tau} = \frac{\bar{\varepsilon}R_0^2}{2p^2} (5 \cos^2 i - 1) \equiv K_\omega \quad (6.10.2)$$

(это скорость движения перигея  $\omega_\pi$  орбиты). Возмущенное движение (6.9.2) вектора кинетического момента потому только получилось столь простым, что мы пренебрегли эволюцией орбиты, описываемой формулами (6.10.1),



(6.10.2). А расчет по формуле, например, (6.10.1) показывает, что типичная орбита спутника повернется в пространстве на  $360^\circ$  за 10—12 суток \*).

Влияние эволюции орбиты на эволюцию вращения и ориентации спутника впервые рассматривалось автором этой книги в работах [6.16, 6.19]; построенная теория была затем развита им в монографии [6.1] с учетом разнообразных моментов сил, действующих на спутник. Изящно усовершенствовал эту теорию недавно С. И. Трушин в своем этюде [6.20]. Исходя из перечисленных работ, запишем уравнения возмущенного движения вектора кинетического момента в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\rho}{d\tau} &= +K_{\Omega} \sin \Sigma, \\ \frac{d\Sigma}{d\tau} &= 2K_g \cos \rho - K_{\Omega} (\cos i - \sin i \operatorname{ctg} \beta \cos \Sigma). \end{aligned} \right\} \quad (6.10.3)$$

Здесь постоянная

$$K_g = \frac{3}{8} \frac{(A-C) \omega_0}{L_0 (1-e^2)^{3/2}} (3 \cos^2 \vartheta_0 - 1),$$

а  $K_{\Omega}$  и  $K_{\omega}$  — постоянные, определяемые формулами (6.10.1), (6.10.2). Переменная  $\rho$  имеет прежний смысл, а новая переменная  $\Sigma$  связана со старой  $\sigma$  соотношением

$$\Sigma = \sigma + \omega_{\pi} - \frac{\pi}{2}.$$

Отметим, кстати, что для трехосного спутника ( $A \neq B \neq C$ ) эволюционные уравнения имеют точно такой же вид (6.10.3), только постоянный коэффициент  $K_g$  вычисляется по более сложной формуле, найденной Ф. Л. Черноусько [6.17].

Смысл уравнений (6.10.3) прост. Рассмотрим небесную сферу (рис. 6.10), изобразив на ней небесный экватор, ее пересечение с плоскостью орбиты и след вектора  $\mathbf{L}$  кинетического момента.

Пусть момент гравитационных сил не действует (так же как и никакой другой). Тогда вектор  $\mathbf{L}$  остается неподвижным в абсолютном пространстве (в системе координат

---

\*) В формулах (6.10.1) и (6.10.2) обозначено:  $R_g$  — экваториальный радиус Земли (6371 км),  $p$  — фокальный параметр орбиты,  $i$  — наклонение орбиты к экватору,  $\bar{e} = 0,0016331$  — безразмерный параметр, определяемый величиной сжатия Земли.

$XYZ$ , ось  $X$  которой направлена в точку весеннего равноденствия, а ось  $Z$  — в Северный полюс мира), но меняет свое положение относительно орбиты из-за ее эволюции. Иначе говоря, углы  $\rho$  и  $\sigma$ , определяющие положение вектора  $\mathbf{L}$  относительно орбиты, меняются из-за изменения углов  $\Omega$  и  $\omega_{\pi}$ , описывающих положение орбиты. Из рис. 6.10 совершенно ясно, что за счет изменения угла  $\omega_{\pi}$

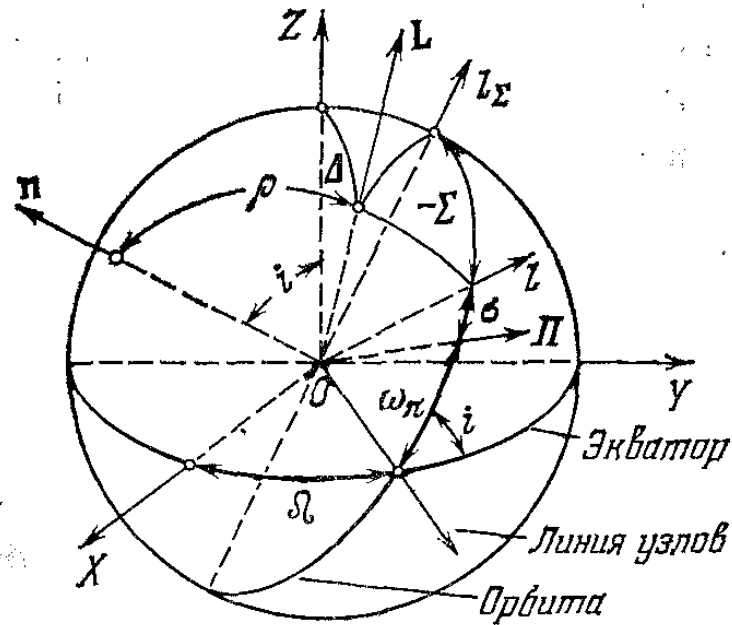


Рис. 6.10. Относительное положение вектора кинетического момента и орбиты:  $Z$  — направление на Северный полюс мира,  $X$  — направление на точку весеннего равноденствия,  $\mathbf{p}$  — направление нормали к плоскости орбиты,  $\mathbf{L}$  — направление вектора кинетического момента,  $O\Pi$  — направление радиуса-вектора перигея орбиты,  $\mathbf{l}$  — проекция  $\mathbf{L}$  на плоскость орбиты,  $l_{\Sigma}$  — линия отсчета угла  $\Sigma$ .

(движение перигея орбиты в ее плоскости) угол  $\rho$  между нормалью  $\mathbf{p}$  к плоскости орбиты и направлением  $\mathbf{L}$  меняться не может, а меняется лишь угол  $\sigma$ , притом так, что приращению  $\Delta\omega_{\pi}$  соответствует приращение  $\Delta\sigma = -\Delta\omega_{\pi}$ .

Удобно поэтому вместо угла  $\sigma$  ввести новый угол, не зависящий от движения перигея. Таким углом является, например, сумма  $\sigma + \omega_{\pi}$ , определяющая угловое положение проекции  $\mathbf{l}$  вектора  $\mathbf{L}$  на плоскость орбиты относительно линии узлов. Этот угол неизменен при движении перигея. Однако еще удобнее ввести угол  $\Sigma = \sigma + \omega_{\pi} - \frac{\pi}{2}$ , производя тем самым отсчет поворота вектора  $\mathbf{L}$  от «наивысшей» точки орбиты (на рис. 6.10 изображен угол  $-\Sigma$ ). Итак, углы  $\rho$  и  $\Sigma$  не меняются за счет

движения перигея орбиты. Однако они меняются за счет движения узла орбиты, причем, как можно вычислить, со скоростями

$$\left(\frac{d\rho}{d\tau}\right)_1 = K_{\Omega} \sin \Sigma,$$

$$\left(\frac{d\Sigma}{d\tau}\right)_1 = -K_{\Omega} (\cos i - \sin i \operatorname{ctg} \rho \cos \Sigma),$$

где  $K_{\Omega}$  — ранее выписанная скорость (6.10.1) движения узла орбиты. Но угол  $\Sigma$  меняется еще и за счет влияния гравитационного момента со скоростью (6.9.2). Складывая все скорости изменения сначала угла  $\rho$ , затем угла  $\Sigma$ , получим два эволюционных уравнения (6.10.3).

Эти уравнения могут быть приведены к каноническому виду с не зависящими явно от времени правыми частями, из которых следует первый интеграл уравнений (6.10.3):

$$K_{\Omega} (\cos i \cos \rho + \sin i \sin \rho \cos \Sigma) - K_g \cos^2 \rho = h_0. \quad (6.10.4)$$

Здесь  $h_0$  — постоянная интегрирования. Уравнение (6.10.4) определяет семейство  $\rho(\Sigma, h_0)$  возможных траекторий конца вектора кинетического момента. Естественно, что при  $K_{\Omega} = 0$  это семейство является множеством малых кругов  $\rho = \rho_0$  (вдоль которых прецессирует  $\mathbf{L}$  под влиянием гравитационных моментов), а при  $K_g = 0$  семейство превращается в множество малых кругов  $\Delta = \Delta_0$ , где  $\Delta$  — угол между  $\mathbf{L}$  и направлением оси  $Z$  на полюс мира (рис. 6.10) (ведь при отсутствии гравитационных моментов вектор  $\mathbf{L}$  неподвижен в пространстве и, значит, угол  $\Delta$  постоянен). Однако при одновременном отличии от нуля параметров  $K_{\Omega}$  и  $K_g$  семейство (6.10.4) траекторий обладает существенно более сложным характером. Все траектории замкнуты и симметричны относительно большого круга  $\Sigma = 0, \pi$ . На этих меридианах, как следует из вида правых частей уравнений (6.10.3), лежат неподвижные точки семейства траекторий (полюсы), определяемые координатами  $\Sigma = 0, \pi, \rho = \rho_{\pi}$ , причем  $\rho_{\pi}$  удовлетворяет уравнению

$$K_g \sin 2\rho_{\pi} - K_{\Omega} \sin(\rho_{\pi} \mp i) = 0. \quad (6.10.5)$$

Неподвижных точек будет две или четыре в зависимости от значений  $i$  и параметра  $\kappa = -K_g/K_{\Omega}$ . Так, например,

при  $|\kappa| > 1$  неподвижных точек всегда четыре независимо от значения  $i$ . Точнее [6.14]: неподвижных точек две, если

$$|2\kappa|^{2/3} < \sin^{2/3} i + \cos^{2/3} i,$$

и четыре, если знак неравенства противоположен.

На рис. 6.11 изображена примерная зависимость  $\rho_\pi(i)$ , определяемая из (6.10.5), для фиксированного

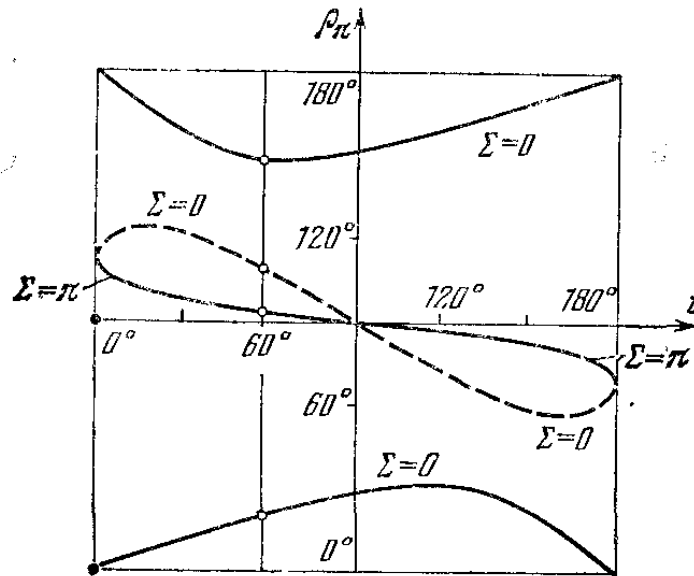


Рис. 6.11. Зависимость положения  $\rho_\pi$  полюса траекторий от наклона  $i$  орбиты при  $\kappa > 1$ .

$\kappa > 1$  (равного приближенно 1,1). Сплошными линиями показано множество значений  $\rho_\pi$ , отвечающее устойчивым полюсам траекторий, а пунктирной линией — неустойчивым. Рассматривая на этом рисунке вертикальное сечение  $i = \text{const}$ , видим, что всякому фиксированному значению  $i \neq 0^\circ, 90^\circ$  отвечает семейство траекторий с тремя устойчивыми и одним неустойчивым полюсом. При этом на меридиане  $\Sigma = \pi$  лежит один (устойчивый) полюс, а все остальные — на меридиане  $\Sigma = 0$ . Соответствующая картина семейства траекторий изображена на рис. 6.12.

Рассматривая это семейство, замечаем, что в окрестности особой точки  $I$  движение близко к «гравитационному» (типа «испорченной» прецессии вектора кинетического момента вокруг нормали к плоскости орбиты). Однако в окрестности особой точки  $A$  движение качественно иное: конец вектора  $L$  описывает вытянутую замкнутую кривую вокруг точки  $A$ , лежащей на меридиане  $\Sigma = \pi$  вблизи плоскости орбиты. Более того, движение такого типа не исчезает при сколь угодно больших (но конечных)

значениях  $|\kappa|$ . Сколь бы ни мал был эффект, вызванный движением узла орбиты ( $K_\Omega$ ), по сравнению с влиянием гравитационных моментов ( $K_g$ ), это малое влияние всегда даст множество траекторий в окрестности точки 4 на рис. 6.12, которые качественно отличаются от траекторий гравитационного типа. При  $|K_g| \gg |K_\Omega|$  полюсы 1 и 3 будут лежать очень близко к точкам  $\rho = 0$  и  $\rho = \pi$

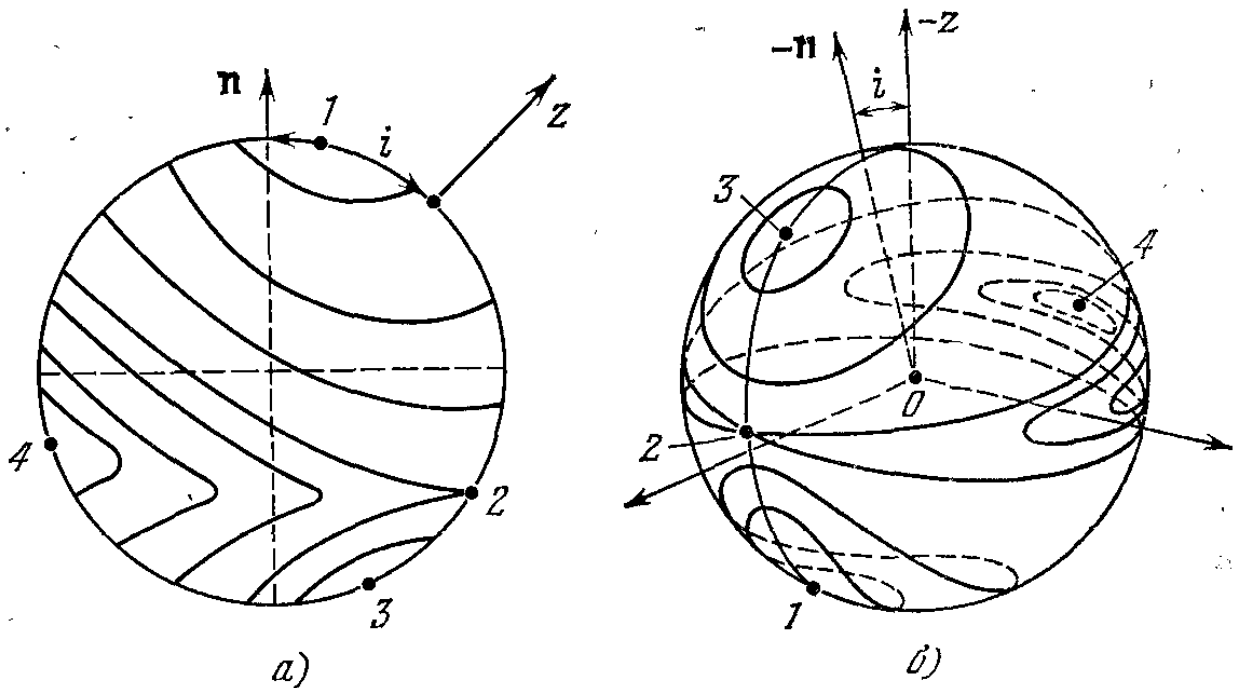


Рис. 6.12. Семейство траекторий конца вектора кинетического момента.

соответственно, а полюсы 2 и 4 будут иметь координату  $\rho$ , близкую по значению к  $\pi/2$ . Но зона «негравитационного» движения все равно будет существовать в виде узкой «перевязи» в окрестности плоскости орбиты; лишь при  $\kappa \rightarrow \infty$  площадь этой зоны стремится к нулю.

Таково несколько неожиданное и явно нетривиальное влияние эволюции орбиты на эволюцию движения около центра масс. Подробнее с этими эффектами можно познакомиться в книге [6.1] (глава 9, § 4, а также глава 8).

А сейчас пора вспомнить, что в заголовке этого пункта стоит имя прославленного крылатого коня — при чем он тут? Но «Пегас» — название американского спутника, эволюция движения около центра масс которого прекрасно укладывается в только что изложенную теорию. Характер этой эволюции был определен экспериментально \*)

\*) Что скрывается за этими словами, будет объяснено в двенадцатом очерке.

и сравнен с теорией в американской работе [6.21] \*). На спутник «Пегас» наибольшее влияние оказывали как раз гравитационный момент и движение узла орбиты, так что эволюция его вращения должна описываться уравнениями типа (6.10.3). На рис. 6.13, заимствованном

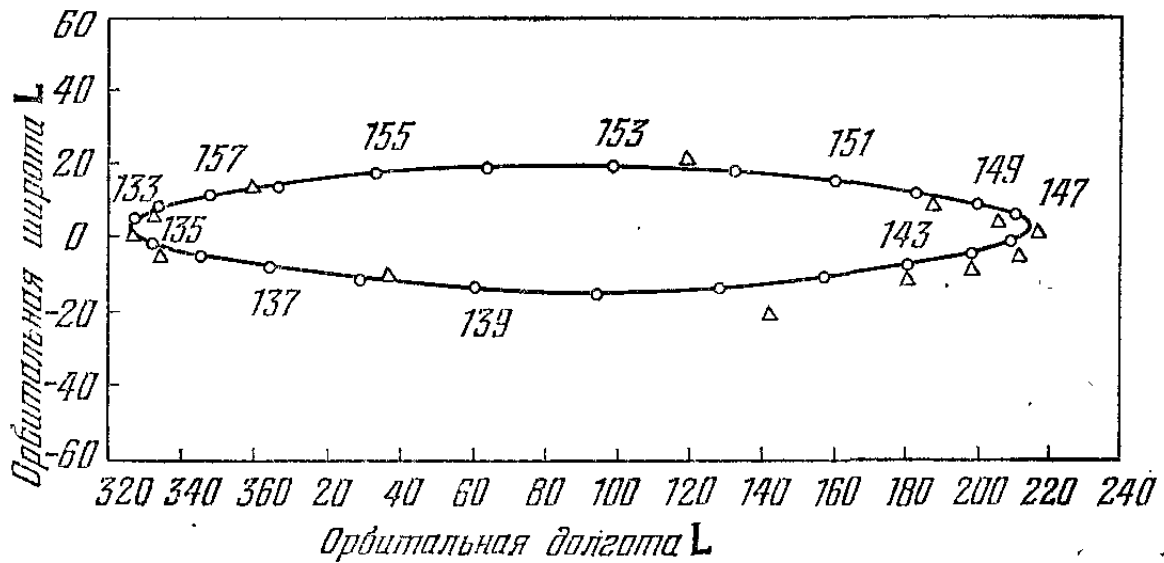


Рис. 6.13. Траектория вектора кинетического момента спутника «Пегас». Сплошная линия с точками — расчет, треугольнички — наблюдательные данные. Вдоль кривой отложено время в сутках от начала 1965 года.

из [6.21], изображена (сплошной линией) рассчитанная по уравнениям (6.10.3) траектория конца вектора кинетического момента спутника «Пегас» и (треугольничками) наблюдательные данные об этой траектории. Видно, что точки ложатся как раз на экзотическую, вытянутую овально вдоль плоскости орбиты, кривую, отвечающую движению по одной из траекторий в окрестности точки *A* на рис. 6.12.

## 11. Луна, Меркурий, резонансы...

Уравнения (6.7.3) с силовой функцией (6.8.1) имеют частную форму, отвечающую колебаниям спутника в плоскости орбиты:  $\rho = 0$ ,  $\vartheta = 90^\circ$ ,  $\sigma = \sigma_0$ . В этом случае из (6.7.3) остаются лишь два уравнения:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \psi}, \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{L}{A}, \quad (6.11.1)$$

\*) Теория, изложенная в [6.21], повторяет более ранние результаты [6.1, 6.17].

которые эквивалентны одному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} - \frac{\partial U}{\partial \psi} \frac{1}{A} = 0, \quad (6.11.2)$$

где

$$U = -\frac{3\omega_0^2}{4(1-e^2)^3} (1 + e \cos \nu)^3 (A - C) \cos (2\psi - 2\nu + 2\sigma_0). \quad (6.11.3)$$

Если раньше полагалось, что  $\psi$  — быстрая переменная, то теперь это не обязательно, зато будем считать, что разность моментов инерции  $A - C$  мала, так что спутник близок к динамически-сферическому. Этот случай важен для естественных спутников и планет.

Если  $A - C = 0$ , то решение уравнений (6.11.1) или (6.11.2) определяет равномерное вращение

$$\psi = \Omega\tau + \psi_0, \quad \tau = \omega_0 t. \quad (6.11.4)$$

При  $A - C \neq 0$ , но малых, можно искать решение уравнения (6.11.2), близкое к равномерному вращению (6.11.4), пользуясь асимптотическими методами (малый параметр — разность моментов инерции спутника). Такое исследование провел Ф. Л. Черноусько в работе [6.22]. Будем искать решение уравнений (6.11.1) в виде (6.11.4), где  $\psi_0$  — новая переменная.

Удобнее ввести вместо  $\psi_0$  другую переменную  $\delta$ , связанную с  $\psi_0$  линейно:

$$2\delta = \pi + 2(\sigma_0 + \psi_0).$$

Обозначим еще  $\Omega = m/2$ . Тогда

$$\frac{\partial U}{\partial \psi} = \frac{\partial U}{\partial \delta}, \quad \dot{\psi} = \frac{m}{2} + \dot{\delta}, \quad \ddot{\psi} = \ddot{\delta},$$

$$U = \frac{3}{4} \frac{\omega_0^2}{(1-e^2)^3} (1 + e \cos \nu)^3 (A - C) \cos (m\tau - 2\nu + 2\delta).$$

Чтобы получить теперь асимптотическое решение, надо осреднить  $U$  по  $\tau$  и подставить в уравнения (6.11.1). Однако при любых не целых значениях  $m$  результат осреднения будет равен нулю: нерезонансное вращение спутника не отличается от равномерного. При целых значениях  $m$   $U$  является периодической функцией от  $\nu$ , и тогда

$$\bar{U} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U \frac{d\tau}{d\nu} d\nu.$$

Результат осреднения оказывается таков:

$$\bar{U} = \frac{3}{4} \omega_0^2 (A - C) \Phi_m(e) \cos 2\delta, \quad \left. \begin{aligned} & \\ & \Phi_m(e) = \frac{1}{\pi (1 - e^2)^{3/2}} \int_0^\pi (1 + e \cos \nu) \times \\ & \qquad \qquad \qquad \times [m\tau(\nu) - 2\nu] d\nu, \end{aligned} \right\} (6.11.5)$$

где  $\tau(\nu)$  определяется по формуле (6.8.2), а уравнение движения (6.11.2) превращается в уравнение

$$\frac{d^2\delta}{d\tau^2} + \frac{3}{2} \frac{A - C}{A} \Phi_m(e) \sin 2\delta = 0. \quad (6.11.6)$$

Уравнение (6.11.6), как можно показать, справедливо и для трехосного спутника: нужно только заменить в знаменателе момент инерции  $A$  на третий момент инерции  $B$ .

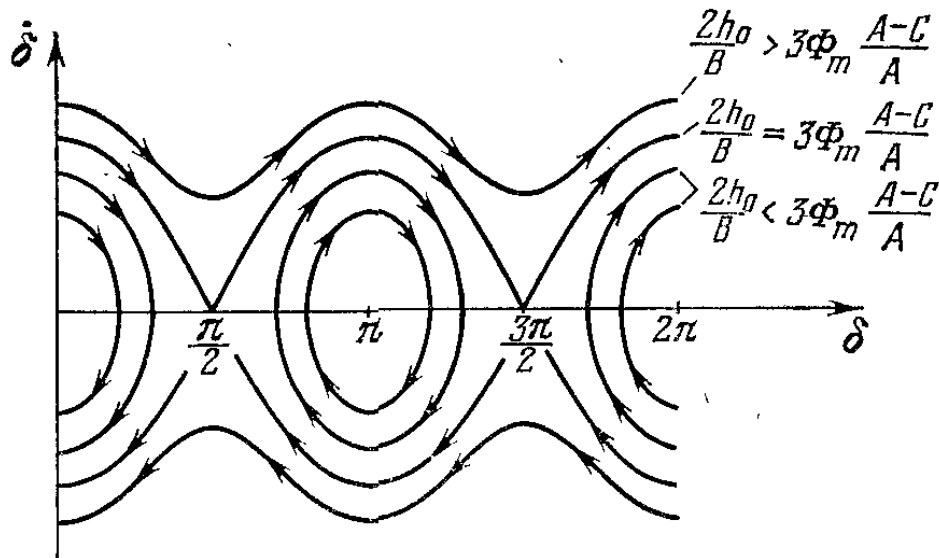


Рис. 6.14. Фазовый портрет.

Уравнение (6.11.6) весьма содержательно, и мы опишем основные свойства и результаты, следующие из (6.11.6).

1. Это уравнение имеет вид уравнений колебаний физического маятника.

2. Оно интегрируется. Первый интеграл — интеграл энергии — имеет вид

$$\frac{1}{2} A \dot{\delta}^2 + \frac{3}{2} \Phi_m(e) (A - C) \sin^2 \delta = h_0. \quad (6.11.7)$$

Эта формула дает возможность построить на плоскости  $\delta, \dot{\delta}$  так называемый *фазовый портрет* траекторий (зависимость  $\dot{\delta}(\delta, h_0)$  при различных фиксированных значе-



ниях  $h_0$ ). Этот портрет изображен на рис. 6.14 для случая, когда  $\Phi_m(e) (A - C) > 0$ .

3. По смыслу угла  $\delta$  равенство его нулю (или  $\pi$ ) при прохождении перигея орбиты означает, что спутник здесь расположен осью момента инерции  $C$  вдоль перигейного радиуса-вектора. Из фазового портрета рис. 6.14 можно понять, что при  $\Phi_m > 0$  устойчив такой режим вращения, когда в перигее спутник вытянут вдоль радиуса-вектора ( $A > C$ ), а при  $\Phi_m < 0$  — вдоль вектора скорости ( $A < C$ ).

4. Фазовая плоскость  $\delta, \dot{\delta}$  делится на область «вращательного движения», где угол  $\delta$  монотонно возрастает (убывает) со временем, и область «колебательного движения» (колебания угла  $\delta$ ). Эту последнюю область назовем *резонансной зоной*. Ее ширина

$$|\dot{\delta}|_{\max} = \sqrt{3 \frac{A-C}{A} \Phi_m(e)}.$$

5. Произвольные колебания  $\delta(\tau)$  в резонансной зоне описываются в эллиптических функциях с модулем

$$k^2 = \sin^2 \delta_0 + \frac{A \dot{\delta}_0^2}{3(A-C) \Phi_m(e)} \leq 1,$$

так что

$$\sin \delta = k \operatorname{sn} \left[ \sqrt{3 \frac{A-C}{A} \Phi_m(e)} (\tau - \tau_0) + F_0, k \right],$$

$$\max |\sin \delta| = k.$$

Безразмерный период колебаний

$$T = \frac{4K(k)}{\sqrt{3 \frac{A-C}{A} \Phi_m(e)}},$$

где  $K(k)$  — полный эллиптический интеграл первого рода.

6. Частота малых колебаний около устойчивого положения

$$\omega_\delta = \sqrt{3 \frac{A-C}{A} \Phi_m(e)}.$$

Заметим теперь, что для круговой орбиты ( $e = 0$ ) все  $\Phi_m \equiv 0$  при любом  $m$ , кроме  $m = 2$ . В последнем случае период вращения вокруг оси в точности равен периоду

обращения по орбите. Мы уже знаем, что именно так движется по своей орбите Луна.

На круговой орбите не может быть иных устойчивых резонансных движений, кроме движения лунного типа. Интересно заметить, что при  $e = 0$   $\Phi_2(0) = 1$  и уравнение (6.11.6) является *точным* уравнением плоских колебаний спутника около положения относительного равнове-

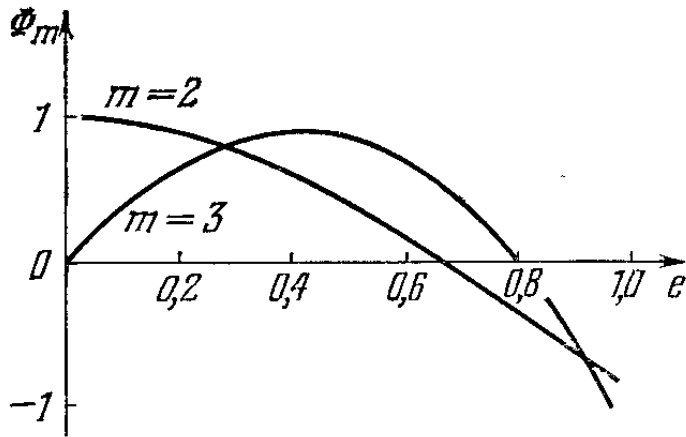


Рис. 6.15. Зависимости  $\Phi_2(e)$  и  $\Phi_3(e)$ .

сая. В этом случае уравнение (6.11.6) может быть получено строго, без осреднения. Угол  $\delta$  при этом является углом между осью инерции спутника и текущим радиусом-вектором его центра масс. На эллиптической орбите движение лунного типа ( $m = 2$ ), как видим, тоже может быть. Кроме того, на эллиптической орбите существует бесчисленное множество резонансных устойчивых движений, отвечающих разным целочисленным значениям  $m$ . Из всех возможных резонансных движений интересны именно движение лунного типа ( $m = 2$ ) и движение меркуриального типа ( $m = 3$ ). На рис. 6.15 приведены зависимости  $\Phi_2(e)$  и  $\Phi_3(e)$  [6.22, 6.23]. Для малых значений  $e$  [6.2, 6.22]

$$\Phi_2(e) = 1 - 5 \frac{e^2}{2} + 13 \frac{e^4}{16} - \dots,$$

$$\Phi_3(e) = 7 \frac{e}{2} - 123 \frac{e^3}{16} + \dots$$

Резонансы при  $m > 3$  играют все меньшую роль (по крайней мере для малых эксцентриситетов) с возрастанием  $m$ , так как  $\Phi_m(e) \sim e^{m-2}$ .

Устойчивые вращения лунного типа изображены на рис. 6.16. При малых эксцентриситетах спутник проходит перигей, располагаясь продольной осью вдоль радиуса-вектора. Однако при  $e > 0,682$  устойчивым будет такое вращение, когда спутник проходит перигей, «вытянувшись» вдоль вектора скорости. Про резонансное вращение Меркурия уже упоминалось в четвертом очерке. Угловая скорость его осевого вращения ровно в полтора раза больше орбитальной угловой скорости ( $\Omega = 3/2$ ). У Меркурия

довольно эксцентричная орбита ( $e = 0,206$ ). Для такой орбиты  $\Phi_3(e) \approx 0,7$ , в то время как  $\Phi_1(e) \approx 0,9$ . Иначе говоря, ширина резонансной зоны для  $m = 3$  ( $\Omega = 3/2$ ) имеет тот же порядок, что и ширина зоны при  $m = 2$  ( $\Omega = 1$ ). В процессе эволюции, уменьшая свою угловую

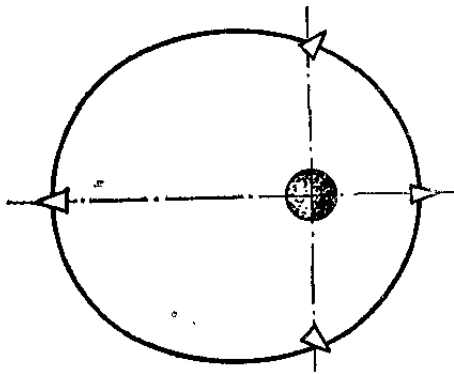


Рис. 6.16. Вращение лунного типа ( $m = 2$ ).

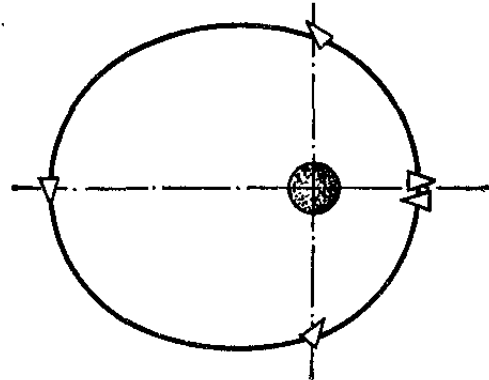


Рис. 6.17. Вращение типа Меркурия ( $m = 3$ ).

скорость под влиянием приливных сил, Меркурий имел хороший шанс угодить в резонанс  $m = 3$ , не дойдя до резонанса с меньшей угловой скоростью ( $m = 2$ ), — так оно и случилось \*). На рис. 6.17 изображено вращение типа Меркурия. В перицентре спутник всегда вытянут вдоль радиуса-вектора (поочередно: то «носом», то «кормой» к центру притяжения), а в апоцентре вытянут вдоль вектора скорости (тоже поочередно: то «кормой», то «носом» вперед).

Мы кратко рассмотрели плоские резонансные вращения в гравитационном поле. Фактические резонансные движения осложнены пространственным характером вращения небесных тел. Так, например, вектор кинетического момента вращательного движения Меркурия составляет угол, возможно, около  $25^\circ$ , с нормалью к плоскости его орбиты [6.2, 6.27]. Это уменьшает ширину резонансной зоны по сравнению с той, которая получается в рассмотренном здесь плоском случае. А. П. Торжевский [6.24 а, б] и А. П. Маркеев [6.25] провели большую серию исследований резонансных вращений спутников.

Теперь мы можем заключить, что наличие устойчивых резонансных вращений небесных тел — не случайно; оно проистекает из природы гравитационных сил.

\*) Удивительно интересным является факт, что характер приливных сил не позволил Меркурию «застрять» на резонансе с  $m > 3$ , а вот на  $m = 3$  — пожалуйста [6.2]!

## 12. Скиапарелли и другие

Нет нужды подчеркивать, что исследование резонансных вращений имеет равно важное значение в теории движения естественных и искусственных небесных тел. Классический пример резонанса 1 : 1 (период обращения равен периоду вращения) — движение Луны; но этот же резонанс играет первостепенную роль в системах гравитационной стабилизации искусственных спутников. Резонанс 3 : 2 не использовался (и не наблюдался) у искусственных спутников, но открытие такого резонанса в движении Меркурия столь поучительно, что стоит вкратце остановиться на истории этого открытия \*).

Долгое время считалось, что вращение Меркурия вокруг своей оси синхронно с его орбитальным движением, то есть Меркурий, как и Луна, вращается в резонансе 1 : 1. Тогда Меркурий почти точно должен был быть обращенным одной стороной к Солнцу. Именно так знаменитый итальянский астроном Скиапарелли \*\*) в 1889 году истолковал обширную серию своих наблюдений Меркурия. Период обращения Меркурия вокруг Солнца, как известно, 88 суток. Скиапарелли заключил, анализируя свои наблюдения, что и период осевого вращения Меркурия составляет 88 суток. В течение почти столетия (до 1965 года) оптические наблюдения различных астрономов «подтверждали» результат Скиапарелли.

Однако развитие техники (в том числе космической) со временем дало возможность организовать принципиально новые методы наблюдения планет — радиолокационные. Радиолокационные наблюдения Меркурия в 1965 году позволили американским ученым Петтенгилу, Дайсу и Шапиро [6.27, 6.28] установить, что период осевого вращения Меркурия составляет  $59 \pm 3$  суток, а вовсе не 88 суток. Итальянский ученый Колombo (долго работавший в США) обратил внимание, что установленный радиолокационно период вращения Меркурия близок к  $\frac{2}{3}$  от периода обращения Меркурия ( $\frac{2}{3} \cdot 88 = 58,65$  суток); Колombo первый высказал идею о резонансности вращения Меркурия с отношением угловой скорости

\*) Библиографию по этому вопросу см., например, в обзорах [6.2, 6.26].

\*\*) Он прославился тем, что в 1877 году во время великого противостояния Марса открыл на Марсе сеть темных линий, названных им «каналами».

вращения к угловой скорости обращения, равным 3 : 2. Вслед за этим, конечно, снова пересмотрели данные Скиапарелли и его последователей. Было показано, что оптические наблюдения допускают неоднозначное толкование и период вращения  $\sim 59$  суток прекрасно укладывается в эти наблюдения!

Таким образом, Скиапарелли рискует войти в историю науки в несколько печальной роли исследователя, допустившего две знаменитые ошибки в истолковании собственных наблюдений. Это — открытие у Меркурия синхронного вращения, которого нет, и каналов на Марсе, которых, по-видимому, тоже нет \*).

Описывая историю установления периода вращения Меркурия, невозможно умолчать о том, как был установлен период вращения Венеры. Оптические наблюдения Венеры, ввиду мощности ее атмосферы, в принципе могли дать измерения периода вращения лишь верхних слоев атмосферы. Было получено, что атмосфера Венеры имеет обратное вращение; это дало намек (правильный, как потом оказалось) на обратное вращение самой планеты.

Что касается периода вращения собственно Венеры, то за столетия здесь не было получено ничего, кроме укрепившегося здорового любопытства ряда исследователей \*\*).

Положение изменилось в 1962 году после радиолокационных измерений в СССР (коллектив В. А. Котельникова [6.31, 6.26]) и в США (Карпентер и Голдстейн [6.32, 6.33]). Было получено, что Венера вращается вокруг своей оси в обратную сторону по сравнению с орбитальным движением и с периодом около 250 суток. Наклон ее оси к нормали к плоскости орбиты составляет  $1^{\circ},2$ .

Несколько позже период вращения был уточнен, он оказался равным  $243,24 \pm 0,1$  суток, что с точностью до

---

\*) Фотографии поверхности Марса, сделанные американскими космическими зондами «Маринер-4» в июле 1965 года, «Маринер-6» в июле 1969 года и «Маринер-7» в августе 1969 года, с потрясающей неожиданностью показали, что поверхность Марса более похожа на поверхность Луны, чем на что-либо другое. Значительные области Марса покрыты системой кратеров, похожих на лунные. По крайней мере некоторые из знаменитых «каналов» удалось отождествить с цепочками таких кратеров [6.30].

\*\*\*) Автор этой книги сам имеет двадцатилетний, документально установленный, стаж такого любопытства: в 1948 году, еще будучи школьником, опубликовал (в журнале «Физика в школе») письмо с «теоретическим» определением возможного периода вращения Венеры — на основе только что появившейся космогонической теории О. Ю. Шмидта.

результатов измерений совпадает со значением 243,16 суток, при котором Венера в каждом нижнем соединении \*) обращена одной стороной к Земле. Гольдрейх и Пиэл [6.2] были, по-видимому, первыми, кто это понял. Таким образом, во вращении Венеры имеет место резонанс совершенно феноменальный, связанный не только с орбитальным движением Венеры, но и с орбитальным движением Земли. За время между двумя нижними соединениями (583,92 суток) Венера делает в своей орбитальной системе координат пять полных оборотов (в обратном вращении!), а в орбитальной системе координат Земли — четыре полных оборота. Об этом уже говорилось в четвертом очерке.

Теория резонансных вращений Меркурия и Венеры только начинает разрабатываться [6.2] и еще ждет своих вдохновенных исследователей.

---

\*) В нижнем соединении Солнце, Венера, Земля находятся па одной прямой, причем Венера и Земля — по одну сторону от Солнца.

# О черк седьмой

## В КОСМОС ПО СПИРАЛИ

Представьте себе ослепительную, упругую спираль, уносящуюся в небо!..

А. Вознесенский  
«Треугольная груша»

### 1. Малая тяга

В различных лабораториях мира проектируются и разрабатываются реактивные двигатели, у которых реактивная струя создается разгоном заряженных частиц в электростатическом поле (ионные двигатели, работающие на принципе взаимодействия электрического тока с магнитным полем, плазменные и другие двигатели [7.1]). В отличие от реактивных двигателей, работающих на химическом топливе, реактивная тяга получается очень малой и может сообщить космическому кораблю ускорение всего в несколько  $мм/сек^2$ . Иначе говоря, реактивное ускорение составляет тысячные доли ускорения силы тяжести на поверхности Земли ( $g_0 = 9,81 м/сек^2$ ). Ясно, что с таким ускорением от Земли не оторвешься. Для этого нужны ускорения большие, чем  $g_0$ , что и обеспечивается ракетами на химическом топливе.

Но если космический корабль уже выведен на околоземную орбиту, то тут-то двигатель малой тяги может очень пригодиться. Двигатели малой тяги могут работать непрерывно длительное время. Это позволяет осуществить медленную (из-за малости тяги), но длительную эволюцию орбиты спутника. Космический корабль может не спеша, виток за витком, раскручиваться по спирали вокруг Земли вплоть до того момента, когда скорость корабля станет параболической и он сможет улететь из окрестностей Земли к дальним планетам. Такой маневр может оказаться выгодным, так как потребует меньшего расхода массы, чем при полете с помощью только химических двигателей. Можно будет отправить в межпланетное путешествие большой полезный груз.





Траекторию космического корабля, первоначально летящего по замкнутой орбите вокруг планеты, а затем разгоняющегося до параболической скорости, называют траекторией разгона. Некоторые свойства спиральных траекторий разгона будут рассмотрены в этом очерке.

## 2. Параметры и парадоксы разгона

Ограничимся только тем частным, но важным случаем, когда тяга реактивного двигателя направлена все время по касательной к траектории, а ускорение  $f_p$  этой тяги

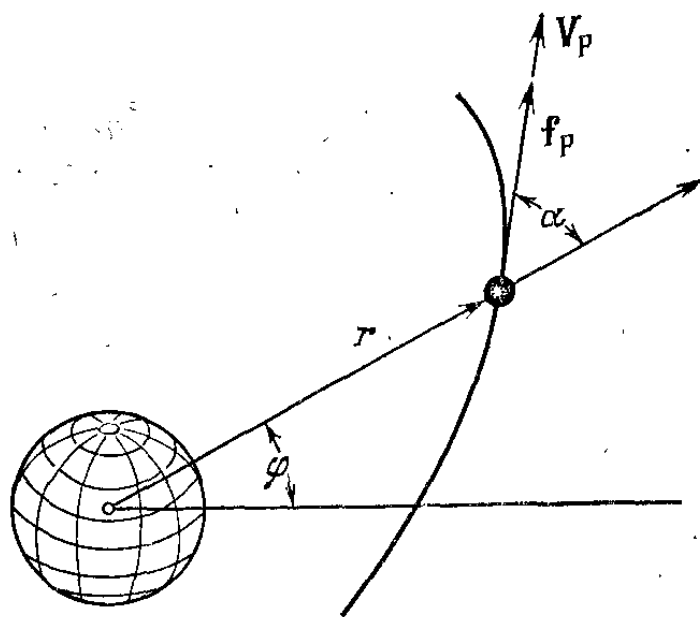


Рис. 7.1. Параметры траектории.

постоянно по величине. Введем обозначения (рис. 7.1):  $r$  — расстояние от центра притяжения до космического корабля (массу которого, как всегда в таких случаях, предполагаем сосредоточенной в его центре масс);  $V_p$  — скорость корабля; вектор тяги  $f_p$  по предположению коллинеарен вектору скорости  $V_p$ ; наконец, угол  $\alpha$  является углом между направлениями векторов  $r$  и  $V_p$ . На рис. 7.1 обозначен еще полярный угол  $\phi$ . Пусть, кроме того,  $r_0$  — произвольное фиксированное расстояние корабля от центра притяжения (например, начальное расстояние), а  $g$  — ускорение силы тяготения на этом расстоянии. Удобно ввести безразмерные переменные

$$\rho = \frac{r}{r_0}, \quad V = \frac{V_p}{\sqrt{gr_0}}, \quad \tau = \sqrt{\frac{g}{r_0}} t. \quad (7.2.1)$$

Здесь  $\tau$  — безразмерное, а  $t$  — размерное текущее время.

Введем безразмерную величину реактивного ускорения

$$f = f_p/g. \quad (7.2.2)$$

Следуя дальше работе В. В. Белецкого и В. А. Егорова [7.2], запишем уравнения движения в переменных  $V$ ,  $\rho$ ,  $\alpha$  в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV}{d\tau} &= f - \frac{\cos \alpha}{\rho^2}, & \frac{d\rho}{d\tau} &= V \cos \alpha, \\ \frac{d}{d\tau} \cos \alpha &= \frac{\sin^2 \alpha}{\rho V} \left( \frac{V^2}{2} + h \right), & h &= \frac{V^2}{2} - \frac{1}{\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (7.2.3)$$

Первое из этих уравнений — уравнение движения в проекции на касательную к орбите, причем  $f$  — реактивное ускорение, а второй член в правой части — проекция ускорения от силы ньютоновского тяготения. Второе уравнение просто описывает радиальную компоненту скорости корабля. Третье уравнение — уравнение движения в проекции на нормаль к траектории. В это уравнение входит величина  $h$  — безразмерная механическая энергия движения.

Для полного определения траектории нужно еще выписать уравнение для полярного угла  $\varphi$ :

$$\frac{d}{d\tau} (\rho^2 \dot{\varphi}) = f\rho \sin \alpha. \quad (7.2.4)$$

Это уравнение может быть проинтегрировано квадратурой, если известно решение системы (7.2.3).

Система (7.2.3) замкнута, и ее интегрирование вместе с (7.2.4) дает полное описание траектории и закона движения. Интегрирование, к сожалению, не может быть проведено в замкнутом аналитическом виде.

Для качественного анализа удобно выписать еще дифференциальные уравнения для оскулирующих элементов орбиты: энергии  $h$  и фокального параметра  $p$ . Эти уравнения легко получить дифференцированием по времени тождеств  $h = \frac{V^2}{2} - \frac{1}{\rho}$  и  $p = \rho^2 V^2 \sin^2 \alpha$ ; подставляя в результат дифференцирования выражения  $\dot{V}$ ,  $\dot{\rho}$ ,  $\dot{\alpha}$  из (7.2.3), обнаружим, что

$$\frac{dh}{d\tau} = fV, \quad \frac{dp}{d\tau} = \frac{2fp}{V}. \quad (7.2.5)$$

Из этих двух уравнений сразу видно, что энергия  $h$  и фокальный параметр  $p$  монотонно увеличиваются. Энергия  $h$  связана с величиной большой полуоси орбиты

соотношением  $h = -1/2a$ ; при этом, конечно,  $a > 0$ , следовательно,  $h < 0$  (до тех пор, пока не будет достигнута параболическая скорость; в этом случае  $h = 0$ ). Монотонное увеличение  $h$  означает монотонное увеличение большой полуоси орбиты  $a$ . Одновременное увеличение

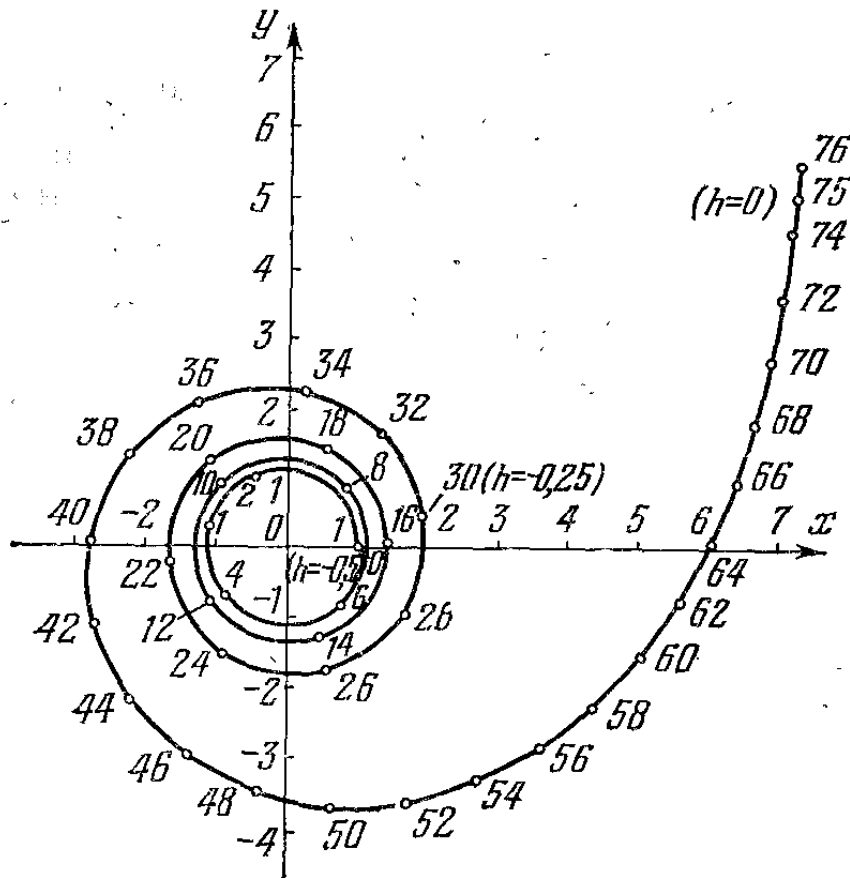


Рис. 7.2. Пример траектории разгона с круговой орбиты. Вдоль траектории указано безразмерное время полета.

параметров  $r$  и  $a$  показывает, что орбита как бы «распухает», ее размеры увеличиваются. Ясно, что при малых значениях ускорения  $f$  на одном витке траектории она будет мало отличаться от кеплеровского эллипса, который бы получился при  $f = 0$ . Но в силу  $da/dt > 0$  и  $dr/dt > 0$  этот эллипс от витка к витку увеличивается в размерах, в результате чего *космический корабль движется вокруг Земли по раскручивающейся спирали.*

Пример такой спирали (полученной численным интегрированием уравнений движения (7.2.3) и (7.2.4)) приведен на рис. 7.2. Для расчета этой спиральной траектории взято довольно большое значение  $f = 0,01$ , чтобы не очень затягивать расчет; однако траектория, изображенная на рис. 7.2, обладает основными качественными особенностями, свойственными и для траекторий с другими,

меньшими значениями  $f$ . Предполагалось, что исходная орбита — круговая (на круговой орбите  $V = 1$ ,  $\rho = 1$ ,  $h = -0,5$ ).

Как видно из этого рисунка, космический корабль, сделав несколько оборотов вокруг Земли по развертывающейся спирали, выходит на конечный участок — плавную дугу траектории, уже не закручивающуюся вокруг Земли; на этом участке достигается параболическая скорость (или, что то же, достигается  $h = 0$ ). Далее корабль продолжает удаляться от Земли, набирая все большую энергию.

Рассмотрим приближенно свойства движения, которые следуют из уравнений (7.2.3). Пусть начальная орбита — круговая, а  $f$  очень мало. Тогда космический корабль опишет около Земли очень много витков спирали и каждый ее виток можно приближенно рассматривать как круговую орбиту (по крайней мере на достаточно большом участке траектории в начале движения). В этом и будет состоять наше приближение (оно подтверждается численными расчетами). Если каждый виток траектории является (приближенно) кеплеровской круговой орбитой, то должно выполняться равенство

$$V^2 = \frac{1}{\rho}.$$

Но в этом случае

$$h = \frac{V^2}{2} - \frac{1}{\rho} = -\frac{V^2}{2};$$

подставляя это значение  $h$  в (7.2.5) для производной  $h$ , получим

$$\frac{dV}{d\tau} = -f \quad (7.2.6)$$

(из первого уравнения (7.2.3) тогда следует, что  $\cos \alpha = 2f\rho^2$ ).

Уравнение (7.2.6) замечательно тем, что с очевидностью описывает парадоксальный, казалось бы, факт: если к спутнику приложена сила, направленная вдоль вектора его скорости в сторону движения, то скорость спутника (в среднем) будет *уменьшаться*; это уменьшение происходит так, как будто приложенная сила изменила направление на противоположное и толкает спутник назад! «Парадокса», конечно, нет: все объясняется тем, что энергия движения, а значит и большая полуось орбиты, увеличивается, но по третьему закону Кеплера уве-

личение большой полуоси орбиты вызывает увеличение периода обращения спутника вокруг Земли, то есть уменьшение в среднем скорости его движения. Что и описывается формулой (7.2.6).

В первом очерке мы упоминали об аэродинамическом «парадоксе» в движении спутника. Спутник под влиянием атмосферного сопротивления увеличивает в среднем скорость своего движения. Суть аэродинамического парадокса точно такая же, как и рассмотренного здесь «парадокса». Сила сопротивления атмосферы направлена по касательной к орбите спутника, только в сторону, обратную движению. В результате энергия движения уменьшается, вместе с ней — и большая полуось орбиты; стало быть, уменьшается период обращения спутника, то есть увеличивается средняя скорость движения спутника по орбите. Это увеличение тоже может быть описано формулой (7.2.6), где только надо положить  $f < 0$ . Точнее, в этом случае  $f = -c_{\text{ат}} V^2$ , где  $c$  — постоянный параметр,  $\rho_{\text{ат}}$  — плотность атмосферы.

Вернемся к нашей задаче о разгоне космического корабля постоянным касательным к траектории ускорением.

Уменьшение в среднем скорости движения спутника происходит, пока его энергия  $h < 0$ . Но в силу монотонного увеличения энергии  $h$  она обязательно достигнет нулевого значения за конечное время и будет продолжать увеличиваться уже в области своих положительных значений. Это следует из того, что при  $h = 0$   $V \neq 0$  и, из (7.2.5),  $dh/dt \neq 0$ . Однако если  $h > 0$ , то из третьего дифференциального уравнения (7.2.3) следует монотонное увеличение  $\cos \alpha$ . При этом  $\cos \alpha \rightarrow 1$  при  $\tau \rightarrow \infty$ ; из второго уравнения (7.2.3) тогда  $p \rightarrow \infty$  при  $\tau \rightarrow \infty$ ; а из первого получим, что  $dV/d\tau \approx f > 0$  при  $\tau \rightarrow \infty$ , так как в этом уравнении член  $\cos \alpha / \rho^2$  становится сколь угодно малым при  $\tau \rightarrow \infty$ . Таким образом, скорость движения по орбите можно считать в среднем монотонно уменьшающейся при  $h < 0$  и монотонно увеличивающейся при  $h > 0$ . Значит, в окрестности  $h \approx 0$  скорость имеет абсолютный минимум и  $dV/d\tau = 0$ .

Этот факт можно использовать для получения приближенных значений параметров траектории в конце участка разгона. Ведь нас больше всего интересует именно момент достижения параболической скорости ( $h = 0$ ). На каком расстоянии от Земли это произойдет? Через какое время? Какова будет при этом скорость

корабля? Условие  $dV/d\tau = 0$  при  $h = 0$  помогает ответить на поставленные вопросы. Из этого условия, обращаясь к первому уравнению (7.2.3), получим

$$\rho_* = \sqrt{\frac{\cos \alpha_*}{f}}, \quad (7.2.7)$$

причем звездочкой обозначено, что берутся параметры в конце участка разгона. Значение  $\cos \alpha_*$  нам пока неизвестно.

Так как параболическая скорость  $V_*$  удовлетворяет условию  $V_*^2 = 2/\rho_*$ , то из (7.2.7) следует

$$V_* = \sqrt[4]{\frac{4f}{\cos \alpha_*}}. \quad (7.2.8)$$

Для вычисления времени  $\tau_*$  разгона до параболической скорости поступим так. Интегрируя первое из уравнений (7.2.5), получим

$$h_* - h_0 = f\bar{V}\tau_*, \quad (7.2.9)$$

где  $\bar{V}$  — среднее значение скорости на участке разгона. Можно положить  $\bar{V} = 0,5(V_0 + V_*)$ , где  $V_0$  — начальное значение скорости,  $V_*$  — параболическая скорость. Но так как  $h_* = 0$ ,  $h_0 = -0,5$ ,  $V_0 = 1$ , а  $V_*$  определяется формулой (7.2.8), то из (7.2.9) получим

$$\tau_* = \frac{1}{f \left( 1 + \sqrt[4]{\frac{4f}{\cos \alpha_*}} \right)}. \quad (7.2.10)$$

Для полного расчета параметров траектории в конце участка разгона осталось определить угол  $\alpha_*$ . В работе [7.2] получена соответствующая формула \*), однако для прикидочных расчетов можно обойтись без нее. Нам важно оценить с небольшой точностью параметры в конце участка разгона. Для этого воспользуемся тем фактом, что при  $\tau \rightarrow \infty$   $\cos \alpha_* \rightarrow 1$ , и в качестве приближенной величины  $\cos \alpha_*$  положим его предельное значение  $\cos \alpha_* \approx 1$ . Тогда формулы (7.2.7) — (7.2.10) упростятся:

$$\rho_* = \frac{1}{\sqrt{f}}, \quad V_* = \sqrt[4]{4f}, \quad \tau_* = \frac{1}{f(1 + \sqrt[4]{4f})}. \quad (7.2.11)$$

\*) Вот эта формула:

$$\sin \alpha_* = \frac{1}{2} (\sqrt[4]{4f})^2 \frac{2\sqrt{f}}{\sqrt{f}-1}.$$

Эти формулы, как показывает сравнение с точным расчетом (с численным интегрированием уравнений движения), дают ошибку в определении параметров разгона всего 5—15%. Такая точность вполне достаточна для прикидочных расчетов, предварительного выбора орбиты и т. д. Выбрав нужный вариант траектории с помощью приближенных формул (7.2.11), мы всегда можем затем просчитать этот вариант и близкие к нему численным интегрированием уравнений движения.

Для перехода к размерным значениям параметров разгона нужно, вычислив  $\rho_*$ ,  $V_*$ ,  $\tau_*$  по (7.2.11), воспользоваться затем формулами (7.2.1).

Отметим еще, что  $V = dS/d\tau$ , где  $S$  — путь (безразмерный), пройденный космическим кораблем. Если это выражение для  $V$  подставить в первое из уравнений (7.2.5) и проинтегрировать, то получим точное соотношение

$$h - h_0 = f(S - S_0), \quad (7.2.12)$$

по которому легко узнать путь, пройденный космическим кораблем. Так, для ускорения  $f = 10^{-4}$  к моменту набора параболической скорости ( $h = 0$ ) корабль, стартовавший с круговой орбиты ( $h_0 = -\frac{1}{2}$ ), пройдет (безразмерный) путь  $S = 0,5 \cdot 10^4$ . Но  $S = S_p/r_0$ , где  $r_0$  — размерный радиус исходной орбиты,  $S_p$  — размерный путь. Если  $r_0 = 7000$  км, то получим  $S_p = 35$  млн. км.

Некоторые результаты расчетов параметров спиральных траекторий разгона приведены в нижеследующих таблицах. Все данные в таблицах относятся к моменту набора параболической скорости. Звездочкой отмечены параметры, вычисленные по приближенным формулам (7.2.11); те же параметры без звездочки получены точно численным интегрированием уравнений движения.

В таблице 7.1 приводится также оценка точности счета по приближенным формулам:  $\delta_\rho$ ,  $\delta_V$ ,  $\delta_\tau$  — относительные ошибки счета по этим формулам (например,  $\delta_\rho = \left| \frac{\rho_* - \rho}{\rho} \right|$  и аналогично для  $\delta_V$ ,  $\delta_\tau$ ). В последнем столбце таблицы 7.1 приводится число витков спирали разгона, пройденный кораблем до момента набора параболической скорости. В таблице 7.1 все параметры безразмерные, а в таблицах 7.2—7.4 приведены некоторые размерные характеристики разгона.

Из таблиц можно заключить, что время разгона при ускорении порядка 1 мм/сек<sup>2</sup> составляет около 100 суток

## Разгон с круговой орбиты

$f$	$\tau_*$	$\tau$	$\delta\tau$	$\rho_*$	$\rho$	$\delta\rho$	$V_*$	$V$	$\delta V$	$\alpha$	$n$
$10^{-2}$	69,1	75	0,078	10,00	8,939	0,118	0,447	0,473	0,072	37,5	4
$5 \cdot 10^{-3}$	145	157	0,074	14,14	12,438	0,137	0,375	0,401	0,063	36	8
$10^{-3}$	799	856	0,066	31,62	27,846	0,135	0,251	0,268	0,068	33	39
$5 \cdot 10^{-4}$	1651	1758	0,061	44,72	39,506	0,132	0,211	0,225	0,066	32,5	79
$10^{-4}$	8761	9192	0,047	100,00	87,715	0,139	0,141	0,151	0,066	31,5	398

ТАБЛИЦА 7.2

Разгон около Земли. Начальная высота круговой орбиты над поверхностью Земли  $H_0 = 300$  км

$f$	$f_p$ , мм/сек <sup>2</sup>	$t$ , сутки	$r$ , км	$V_p$ , км/сек
$10^{-2}$	89,5	0,75	56 630	3,65
$5 \cdot 10^{-3}$	44,7	1,5	82 970	3,10
$10^{-3}$	8,95	8,5	185 760	2,07
$5 \cdot 10^{-4}$	4,5	17,5	263 545	1,74
$10^{-4}$	0,9	92	585 150	1,17

ТАБЛИЦА 7.3

Разгон около Земли. Начальная высота круговой орбиты над поверхностью Земли  $H_0 = 6000$  км

$f$	$f_p$ , мм/сек <sup>2</sup>	$t$ , сутки	$r$ , км	$V_p$ , км/сек
$10^{-2}$	26	2	110 580	2,68
$5 \cdot 10^{-3}$	13	4	153 870	2,275
$10^{-3}$	2,6	21,5	344 483	1,52
$5 \cdot 10^{-4}$	1,3	44	488 730	1,58
$10^{-4}$	0,26	232	1 085 120	0,86

при движении вокруг Земли и около 30 суток при движении вокруг Марса (если разгон начинается с высоты 300 км над поверхностью планеты). Те же времена потребуются для торможения от параболической скорости до круговой с выходом на орбиту с высотой 300 км. Если



Разгон около Марса. Начальная высота круговой орбиты над поверхностью Марса  $H_0 = 300$  км

$f$	$f_p, \text{ мм/сек}^2$	$t, \text{ сутки}$	$r, \text{ км}$	$V_p, \text{ км/сек}$
$10^{-2}$	31,6	0,93	33 000	1,61
$5 \cdot 10^{-3}$	15,8	2	45 920	1,37
$10^{-3}$	3,16	11	102 810	0,91
$5 \cdot 10^{-4}$	1,6	22	145 860	0,77
$10^{-4}$	0,3	115	323 840	0,51

начальная орбита имеет высоту 6000 км, то с ускорением порядка  $1 \text{ мм/сек}^2$  достигнем параболической скорости примерно за 40 суток. (Расчеты для больших высот исходной орбиты (порядка 6000 км) целесообразны потому, что такие орбиты лежат вне первого радиационного пояса Земли. Энергетические затраты на вывод аппарата на такую высоту могут окупиться уменьшением веса антирадиационной защиты.)

Отметим еще одну любопытную формулу. Из таблицы 7.1 следует, что число  $n$  витков спиральной траектории разгона (с исходной круговой орбиты) очень хорошо представляется формулой

$$n = \frac{0,04}{f}. \quad (7.2.13)$$

Эта формула получена анализом численных результатов; аналитически ее вывести не удастся.

Приведем еще (рис. 7.3) расчеты (численное интегрирование) зависимости параметров траектории разгона от времени. Обратим внимание на поведение скорости  $V$  со временем. Это поведение как раз такое, какое мы и получили при качественном анализе уравнений движения: в среднем скорость уменьшается, пока идет набор параболической скорости. При достижении параболической скорости (то есть когда энергия  $h$  достигнет нулевого значения) оказывается, что скорость имеет абсолютно минимальное значение; после этого момента скорость монотонно возрастает. Вместе с тем на рис. 7.3 видны такие детали поведения траектории, которыми мы пренебрегали в приближенном анализе. Это, прежде всего, малые колебания скорости около монотонно уменьшаю-

щегося среднего значения (на участке набора параболической скорости). Изменение орбиты, вообще говоря, лишено монотонности. Если мы начинаем разгон с круговой орбиты, то приложение реактивного ускорения превращает оскулирующую орбиту в слабоэллиптическую; а на эллиптической орбите, как мы знаем, скорость

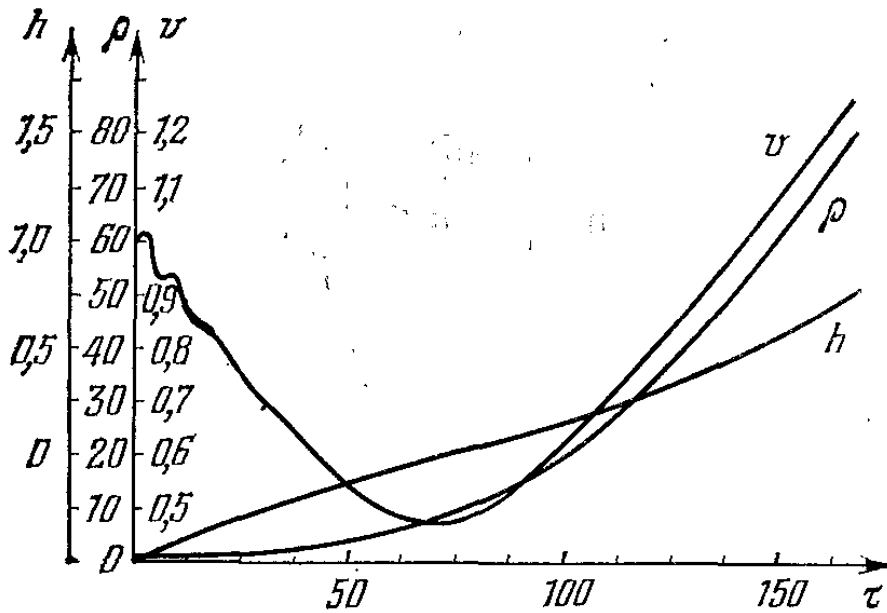


Рис. 7.3. Зависимость параметров траектории разгона с круговой орбиты от времени (безразмерные переменные);  $f = 0,01$ .

и радиус-вектор периодически меняются; эти колебания, наложенные на среднее монотонное изменение параметров, и дают картину, изображенную на рис. 7.3 (колебания в  $\rho$  не видны на этом рисунке из-за его масштаба).

### 3. Монотонная спираль разгона

Можно, однако, построить целый класс траекторий, обладающих монотонностью изменения всех параметров [7.3]. Запишем полную систему уравнений в оскулирующих элементах для нашей задачи:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{d\tau} &= f \frac{2p}{V}, & \frac{de}{d\tau} &= f \frac{2(e + \cos v)}{V}, \\ \frac{d\omega}{d\tau} &= f \frac{2 \sin v}{Ve}, & \frac{dv}{d\tau} &= \frac{\sqrt{p}}{\rho^2} - f \frac{2 \sin v}{Ve}. \end{aligned} \right\} \quad (7.3.1)$$

Здесь, как и в первом очерке,  $e$  — оскулирующий эксцентриситет орбиты,  $\omega$  — оскулирующая долгота перигея,  $v$  — истинная аномалия. Величины  $\rho$  и  $V$  выражаются

через введенные переменные формулами

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos v}, \quad V = \sqrt{\frac{1}{p} (1 + e^2 + 2e \cos v)}. \quad (7.3.2)$$

Напомним, что наши переменные — безразмерные.

Теперь введем замену переменных

$$V = (2f)^{1/4} \bar{V}, \quad \rho = (2f)^{-1/2} \bar{\rho}, \quad p = (2f)^{-1/2} \bar{p}, \quad \tau = (2f)^{-3/4} \bar{\tau}. \quad (7.3.3)$$

Тогда уравнения (7.3.1), (7.3.2) относительно переменных  $\bar{V}$ ,  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{p}$ ,  $\bar{\tau}$  будут иметь точно такой вид, как если бы мы в (7.3.1) положили  $2f \equiv 1$  и написали  $\bar{V}$ ,  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{p}$ ,  $\bar{\tau}$  вместо  $V$ ,  $\rho$ ,  $p$ ,  $\tau$ . Поэтому, определив какую-либо траекторию по (7.3.1) для  $2f = 1$ , мы согласно (7.3.3) получаем целое множество траекторий для произвольных  $f$ .

Что касается траектории с  $2f = 1$ , то, следуя Д. Е. Охочимскому [7.3], будем искать такое решение уравнений (7.3.1), у которого при  $\tau \rightarrow -\infty$   $e \rightarrow 0$ ,  $p \rightarrow 0$ , а также  $\cos v \rightarrow 0$  (в дальнейшем в обозначениях опустим черточки над буквами). Такое решение оказывается всего одно. Оно в определенном смысле универсально, ибо никак не зависит от наперед заданных начальных данных, отвечающих ненулевому расстоянию от центра притяжения. Параметры этого решения меняются монотонно вплоть до набора параболической скорости. Описывающий это решение оскулирующий эллипс тем ближе к окружности, чем меньше его размеры. Любая исходная орбита, отвечающая этому решению, будет эллиптической, с определенной малой эллиптичностью (если размеры орбиты не очень велики).

Описываемой универсальной траектории ввиду подстановки (7.3.3) отвечает множество траекторий, обладающих тем же свойством  $e \rightarrow 0$ ,  $p \rightarrow 0$ ,  $\cos v \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow -\infty$ ; добавим, что решение строится так, чтобы  $e = 1$  при  $\tau = 0$ .

Опишем конечные результаты расчета монотонной спирали разгона [7.3]. Эту спираль удобно разбить на три характерных участка: первый участок при очень малых значениях  $p$  описывается асимптотическим решением — рядами по степеням  $p$ ; второй участок определяется численным интегрированием (начальные данные находятся по асимптотическим формулам первого участка); третий участок при больших значениях  $p$  описывается рядами

по степеням  $1/p$ . Параболическая скорость ( $e = 1$ ) достигается на втором участке.

Оказывается, что на первом участке решение представляется в виде рядов по степеням величины  $p^4$ :

$$\left. \begin{aligned} e &= p^2 \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k p^{4k}, \quad \cos v = p^2 \sum_{k=0}^{\infty} v_k p^{4k}, \\ \omega &= -3,40942 + p^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k p^{4k}, \\ \tau &= 1,34571 + p^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k p^{4k}. \end{aligned} \right\} \quad (7.3.4)$$

Основой для получения этих формул служит преобразование части уравнений (7.3.1) к виду

$$\frac{de}{dp} = f_e(p, e, \cos v), \quad \frac{d \cos v}{dp} = f_v(p, e, \cos v).$$

Коэффициенты  $\varepsilon_k$ ,  $v_k$ ,  $\varphi_k$ ,  $\tau_k$  разложений (7.3.4) собраны в таблице 7.5.

ТАБЛИЦА 7.5

$k$	$\varepsilon_k$	$v_k$	$\varphi_k$	$\tau_k$
0	$1,0 \cdot 10^0$	$1,0 \cdot 10^0$	$-0,5 \cdot 10^0$	$-2,0 \cdot 10^0$
1	$-6,0 \cdot 10^0$	$-3,0 \cdot 10^1$	$2,75 \cdot 10^0$	$4,285714 \cdot 10^{-1}$
2	$3,53 \cdot 10^2$	$3,177 \cdot 10^3$	$-4,835417 \cdot 10^1$	$-5,75 \cdot 10^0$
3	$-5,0216 \cdot 10^4$	$-6,528080 \cdot 10^5$	$4,292169 \cdot 10^3$	$3,604946 \cdot 10^2$
4	$1,271935 \cdot 10^7$	$2,162289 \cdot 10^8$	$-8,098106 \cdot 10^5$	$-5,110699 \cdot 10^4$
5	$-5,007378 \cdot 10^9$	$-1,051549 \cdot 10^{11}$	$2,555165 \cdot 10^8$	$1,281759 \cdot 10^7$
6	$2,829338 \cdot 10^{12}$	$7,073346 \cdot 10^{13}$	$-1,204903 \cdot 10^{11}$	$-5,010652 \cdot 10^9$
7	$-2,173519 \cdot 10^{15}$	$-6,303206 \cdot 10^{16}$	$7,935154 \cdot 10^{13}$	$2,819974 \cdot 10^{12}$

При больших значениях  $p$  (на третьем участке траектории) разложения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} e &= 0,76649p + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon'_k p^{-k}, \quad \cos v = \sum_{k=1}^{\infty} v'_k p^{-k}, \\ \omega &= -1,5708 + p^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi'_k p^{-k}, \\ \tau &= -1,611 + \sum_{k=0}^{\infty} \tau'_k p^{-k}. \end{aligned} \right\} \quad (7.3.5)$$

Коэффициенты  $\varepsilon'_k, \nu'_k, \varphi'_k, \tau_k$  содержатся в таблице 7.6. Наконец, в таблице 7.7 приведены функции  $e(p), \cos \nu(p)$ ,

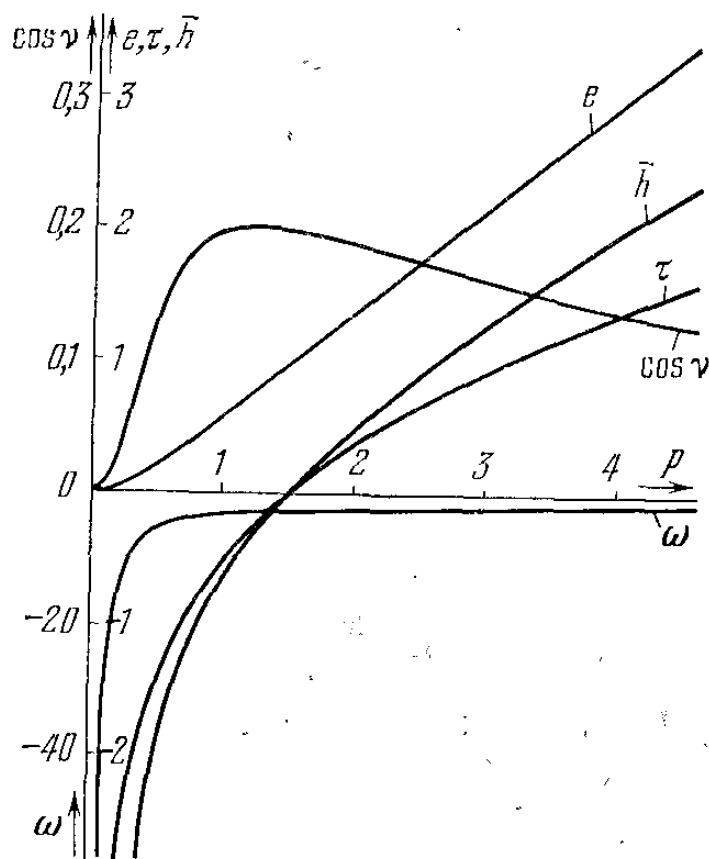


Рис. 7.4. Поведение оскулирующих элементов универсальной спирали Д. Е. Охочимского.

$\omega(p), \tau(p)$  для промежуточных значений  $p$  ( $0,10 \leq p \leq \leq 20,0$ ). В этой же таблице дается значение удвоенной

ТАБЛИЦА 7.6

$k$	$\varepsilon'_k$	$\tau'_k$	$\varphi'_k$	$\nu'_k$
0	—	—	$-1,30465 \cdot 10^0$	$1,53298 \cdot 10^0$
1	$-4,58000 \cdot 10^{-1}$	$9,16000 \cdot 10^{-1}$	0	0
2	$6,80189 \cdot 10^{-1}$	$-2,04057 \cdot 10^0$	$-7,74093 \cdot 10^{-2}$	$-7,40216 \cdot 10^{-1}$
3	$-8,45172 \cdot 10^{-1}$	$3,38069 \cdot 10^0$	$-3,20210 \cdot 10^{-1}$	$5,44150 \cdot 10^{-1}$
4	$8,85247 \cdot 10^{-1}$	$-4,42624 \cdot 10^0$	$1,05876 \cdot 10^0$	$-3,77374 \cdot 10^{-1}$
5	$-4,86283 \cdot 10^{-1}$	$2,91770 \cdot 10^0$	$-2,39421 \cdot 10^0$	$-1,23027 \cdot 10^{-2}$
6	$-9,64784 \cdot 10^{-1}$	$6,75349 \cdot 10^0$	$4,44336 \cdot 10^0$	$8,58759 \cdot 10^{-1}$
7	$4,43942 \cdot 10^0$	$-3,55154 \cdot 10^1$	$-6,81926 \cdot 10^0$	$-2,41946 \cdot 10^0$
8	$-1,10624 \cdot 10^1$	$9,95619 \cdot 10^1$	$7,74454 \cdot 10^0$	$4,80913 \cdot 10^0$
9	$2,11182 \cdot 10^1$	$-2,11182 \cdot 10^2$	$-2,45367 \cdot 10^0$	$-7,51642 \cdot 10^0$
10	$-3,13216 \cdot 10^1$	$3,44538 \cdot 10^2$	$-1,89947 \cdot 10^1$	$8,38035 \cdot 10^0$
11	$2,90194 \cdot 10^1$	$-3,48233 \cdot 10^2$	$7,31602 \cdot 10^1$	$-1,84542 \cdot 10^0$
12	$1,76253 \cdot 10^1$	$-2,29129 \cdot 10^2$	$-1,79535 \cdot 10^2$	$-2,32322 \cdot 10^1$
13	$-1,71363 \cdot 10^2$	$2,39908 \cdot 10^3$	$3,41319 \cdot 10^2$	$8,44939 \cdot 10^1$
14	$5,27883 \cdot 10^2$	$-7,91825 \cdot 10^3$	$-4,90991 \cdot 10^2$	$-2,00619 \cdot 10^2$

$p$	$e$	$\cos \nu$	$\omega$	$\tau$	$\bar{h}$
0,10	0,009994	0,009970	-53,3820	-4,97871	-9,99900
0,12	0,014382	0,014313	-38,0922	-4,42754	-8,33161
0,14	0,019556	0,019382	-28,8661	-3,99908	-7,14013
0,16	0,025503	0,025128	-22,8710	-3,65360	-6,24594
0,18	0,032207	0,031475	-18,7539	-3,36729	-5,54979
0,20	0,039646	0,038332	-15,8022	-3,12493	-4,99214
0,22	0,047793	0,045597	-13,6115	-2,91623	-4,53507
0,24	0,056615	0,053158	-11,9390	-2,73398	-4,15331
0,26	0,066076	0,060904	-10,6313	-2,57297	-3,82936
0,28	0,076137	0,068730	-9,58789	-2,42927	-3,55073
0,30	0,086757	0,076539	-8,74073	-2,29994	-3,30824
0,32	0,097896	0,084250	-8,04234	-2,18264	-3,09505
0,34	0,109512	0,091795	-7,45886	-2,07556	-2,90590
0,36	0,121566	0,099118	-6,96556	-1,97723	-2,73673
0,38	0,134020	0,106179	-6,54409	-1,88645	-2,58431
0,4	0,146838	0,112949	-6,18056	-1,80226	-2,44610
0,45	0,180027	0,110190	-5,39184	-1,61006	-2,15020
0,5	0,215315	0,142001	-4,93070	-1,45562	-1,90728
0,55	0,251470	0,153636	-4,50292	-1,31363	-1,70321
0,6	0,288902	0,163344	-4,20657	-1,19254	-1,52756
0,7	0,365541	0,178381	-3,73868	-0,98117	-1,23769
0,8	0,443994	0,188657	-3,41258	-0,80437	-1,00359
0,9	0,523513	0,195430	-3,17267	-0,65205	-0,80659
1,0	0,603641	0,199643	-2,98886	-0,51783	-0,63562
1,2	0,764699	0,202929	-2,72567	-0,28806	-0,34603
1,4	0,925942	0,202030	-2,54612	-0,09406	-0,10188
1,6	1,08688	0,198833	-2,41563	0,07546	0,11332
1,8	1,24734	0,194388	-2,31640	0,22720	0,30881
2,0	1,40726	0,189299	-2,23832	0,36543	0,49019
2,2	1,56666	0,183923	-2,17524	0,49306	0,66110
2,4	1,72556	0,178472	-2,12318	0,61211	0,82398
2,6	1,88401	0,173075	-2,07947	0,72406	0,98058
2,8	2,04205	0,167807	-2,04223	0,83004	1,13213
3,0	2,19972	0,162713	-2,01012	0,93090	1,27959
3,5	2,59250	0,150857	-1,94631	1,16480	1,63459
4,0	2,98367	0,140292	-1,89878	1,37817	1,97558
4,5	3,37360	0,130929	-1,86198	1,57570	2,30692
5,0	3,76253	0,122627	-1,83263	1,76056	2,63133
6,0	4,53820	0,108656	-1,78875	2,10061	3,26588
8,0	6,08385	0,088240	-1,73408	2,69644	4,50165
10,0	7,62514	0,074166	-1,70136	3,21638	5,71428
12,0	9,16399	0,063919	-1,67957	3,68410	6,91490
14,0	10,7014	0,056140	-1,66402	4,11294	8,10847
16,0	12,2377	0,050040	-1,65236	4,51134	9,29756
18,0	13,7733	0,045130	-1,64329	4,88505	10,4836
20,0	15,3085	0,041095	-1,63604	5,23819	11,6675

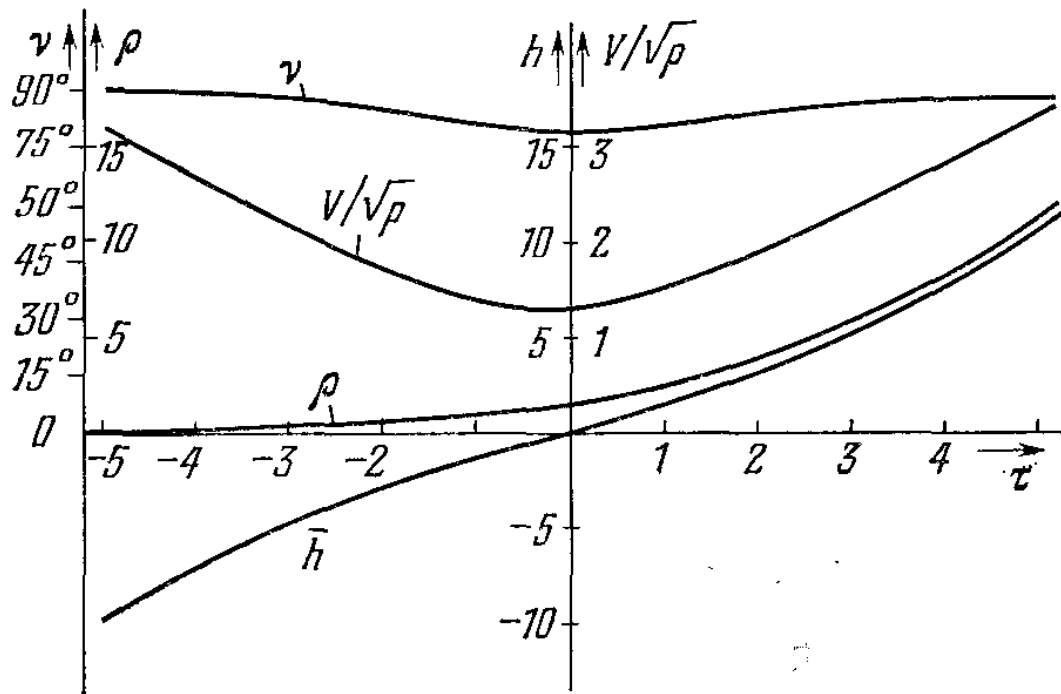


Рис. 7.5. Зависимость от времени скорости  $V$ , энергии  $\bar{h}$ , расстояния  $\rho$  вдоль универсальной спирали.

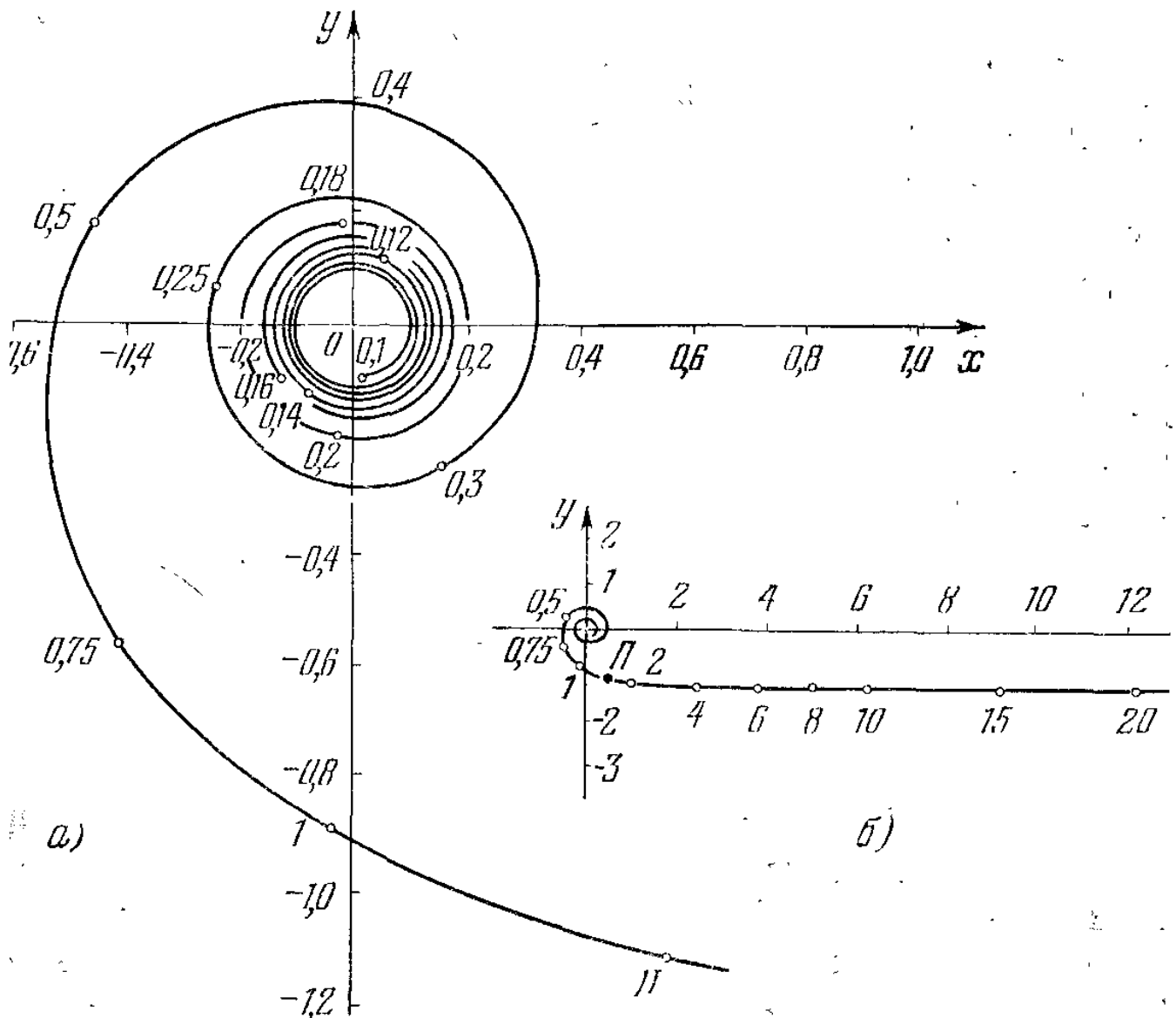


Рис. 7.6. Общий вид универсальной спирали.

$$2h \equiv \bar{h} = \frac{e^2 - 1}{p}.$$

Поведение этих функций в зависимости от  $p$  показано также на рис. 7.4. На рис. 7.5 показано, как меняются в зависимости от времени скорость  $V$ , энергия  $\bar{h}$ , расстояние  $\rho$ .

Наконец, на рис. 7.6 изображен общий вид описываемой спирали; вдоль траектории отложены значения параметра  $p$ , а буквой  $\Pi$  отмечена точка набора параболической скорости. В этой точке

$$V = 1,26846, \quad \rho = 1,24259 *).$$

#### 4. Произвольные траектории с малыми эксцентриситетами

Исследованные в предыдущем пункте траектории представляют собой, конечно, лишь частный класс решений уравнений (7.3.1). В этом классе при заданном ускорении малой тяги к фиксированному расстоянию от центра притяжения присовокупляется вполне определенное единственное значение оскулирующего эксцентриситета орбиты. Это решение очень удобно для расчета, например, необходимых для разгона энергетических затрат (для множества близких исходных орбит с одинаковыми начальными энергиями  $h_*$  затраты на разгон будут примерно такими же, как и на рассмотренной выше спирали, если только за начальную точку на ней выбрана точка, отвечающая значению  $h_*$ ). Однако траектория, описанная в предыдущем пункте, «слишком гладка» — соответствующий класс решений обладает монотонным изменением параметров. Эта траектория, строго говоря, не типична по поведению своих оскулирующих параметров.

Представляет интерес поэтому попытаться аналитическим путем исследовать поведение произвольных траекторий разгона. Это можно сделать, используя малость реактивного ускорения. Малость «возмущающей силы» (реактивного ускорения) позволяет применить для анализа асимптотические методы нелинейной механики. Такое исследование проведено, например, Ю. Г. Евтушенко

---

\*) Очень интересный цикл работ о построении аналогичных, по оптимальных траекторий разгона выполнил Г. Б. Ефимов [7.5].



в работе [7.4]. Мы сейчас рассмотрим только одну из задач, решенных в этой работе. А именно предположим, что начальная орбита обладает произвольным, но достаточно малым эксцентриситетом, и рассмотрим поведение разгонной траектории до тех пор, пока эксцентриситет еще остается достаточно малым.

Предварительно преобразуем уравнения (7.3.1). Введем компоненты вектора Лапласа

$$\alpha = e \sin \omega, \quad \beta = e \cos \omega \quad (7.4.1)$$

в качестве новых переменных (вместо  $e$  и  $\omega$ ). Это дает возможность избавиться от  $e$  в знаменателях правых частей уравнений и, таким образом, избежать особенности при  $e \rightarrow 0$ . Далее, введем аргумент широты

$$u = \omega + \nu.$$

Из (7.3.1) легко видеть, что

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{\sqrt{p}}{\rho^2},$$

следовательно,  $u$  меняется монотонно и притом быстро ( $\frac{du}{d\tau} \sim 1$ ) по сравнению с  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $p$ . Удобно взять  $u$  в качестве независимой переменной вместо  $\tau$ . После таких преобразований система (7.3.1) примет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{du} &= 2fp^3 F, \\ \frac{d\alpha}{du} &= 2fp^2 (\alpha + \sin u) F, \\ \frac{d\beta}{du} &= 2fp^2 (\beta + \cos u) F, \\ F &= (1 + \beta \cos u + \alpha \sin u)^{-2} \times \\ &\times (1 + \alpha^2 + \beta^2 + 2\beta \cos u + 2\alpha \sin u)^{-1/2}, \end{aligned} \right\} (7.4.2)$$

или, с точностью до первых степеней эксцентриситета (то есть с точностью до первых степеней  $\alpha$  и  $\beta$ ),

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{du} &= 2fp^3 (1 - 3\alpha \sin u - 3\beta \cos u), \\ \frac{d\alpha}{du} &= fp^2 (-\alpha + 2 \sin u + 3\alpha \cos 2u - 3\beta \sin 2u), \\ \frac{d\beta}{du} &= fp^2 (-\beta + 2 \cos u - 3\alpha \sin 2u - 3\beta \cos 2u). \end{aligned} \right\} (7.4.3)$$

К этой системе непосредственно можно применить алгоритм асимптотического метода, считая  $f$  малым параметром, а  $u$  быстрой переменной. Осредняя по этой переменной правые части в (7.4.3), получим

$$\frac{dp}{du} = 2fp^3, \quad \frac{d\alpha}{du} = -fp^2\alpha, \quad \frac{d\beta}{du} = -fp^2\beta. \quad (7.4.4)$$

Из (7.4.4) видим, что

$$\frac{de^2}{du} \equiv \frac{d}{du} (\alpha^2 + \beta^2) = -\frac{1}{2} fp^2 (\alpha^2 + \beta^2) < 0.$$

Таким образом, эксцентриситет орбиты под действием касательного реактивного ускорения в среднем монотонно уменьшается. Это находится в досадном несоответствии с известными уже нам свойствами траекторий разгона. Ведь к моменту разгона скорость достигает параболического значения, что соответствует значению эксцентриситета  $e = 1$ . Значит, рано или поздно эксцентриситет должен начать увеличиваться, что не «ухватывается» решением осредненной системы (7.4.4). Объяснение этого факта может быть одно: так как решение усредненной системы (7.4.4) отвечает решению исходной системы (7.4.3) лишь на ограниченном интервале «времени», то эффект увеличения эксцентриситета начинает проявляться только после истечения этого интервала.

Чтобы получить этот эффект, надо увеличить интервал «времени», на котором достаточно точно аппроксимируется решение. Проще говоря, надо взять более высокое приближение к решению системы (7.4.3). Для этого, следуя работе [7.4], будем считать величины  $f$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  одного порядка малости (для определенности  $\varepsilon$ ). Тогда решение системы (7.4.3) будем искать в виде

$$p = \bar{p} + \varepsilon p_1, \quad \alpha = \bar{\alpha} + \varepsilon \alpha_1, \quad \beta = \bar{\beta} + \varepsilon \beta_1, \quad (7.4.5)$$

где  $\bar{p}$ ,  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$  — решение осредненной системы второго приближения, то есть системы типа

$$\frac{d\bar{p}}{du} = \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2, \quad (7.4.6)$$

а  $p_1$ ,  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  должны определиться в результате подстановки (7.4.5) в (7.4.3) и приравнивания членов с одинаковыми степенями  $\varepsilon$ . Оказывается, что эти функции должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{dp_1}{du} = 0, \quad \frac{d\alpha_1}{du} = 2p^2 \sin u, \quad \frac{d\beta_1}{du} = 2p^2 \cos u. \quad (7.4.7)$$

Но система (7.4.6) тождественно совпадает с (7.4.4). Правые части последних двух уравнений из (7.4.4) имеют второй порядок малости, так как по условию  $f\alpha \sim \varepsilon^2$ ,  $f\beta \sim \varepsilon^2$ ; в первом же уравнении (7.4.4) содержится только член первого порядка малости, а член второго порядка тождественно равен нулю.

Решение системы (7.4.4) легко получить ее интегрированием, а в качестве решения системы (7.4.7) возьмем

$$p_1 = 0, \quad \alpha_1 = -2p^2 \cos u, \quad \beta_1 = 2p^2 \sin u.$$

Подставляя эти значения в (7.4.5) (считаем, что  $\varepsilon \equiv f$ ) и учитывая, что  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$ ,  $\bar{p}$  — решение системы (7.4.4), получим окончательно:

$$\left. \begin{aligned} p &= p_0 (1 - 4p_0^2 f u)^{-1/2}, \\ \alpha &= \frac{A}{\sqrt{p}} - 2fp^2 \cos u, \\ \beta &= \frac{B}{\sqrt{p}} + 2fp^2 \sin u. \end{aligned} \right\} \quad (7.4.8)$$

Постоянные  $A, B$  определяются условием  $\alpha = \alpha_0$ ,  $\beta = \beta_0$  при  $u = 0$ . Решение (7.4.8) аппроксимирует точное решение системы (7.4.3) с погрешностью  $\sim f^2$  на интервале  $u \sim f^{-1}$ , если только  $e = \sqrt{\alpha_0^2 + \beta_0^2} \sim f$ .

Исследуем решение (7.4.8). Фокальный параметр  $p$  монотонно возрастает, так что орбита увеличивается в размерах. Возводя выражения  $\alpha$  и  $\beta$  в (7.4.8) в квадрат, складывая и осредняя по  $u$ , получим среднее по витку орбиты значение  $\bar{e}^2$  квадрата оскулирующего эксцентриситета. Это выражение имеет вид

$$\bar{e}^2 = \frac{A^2 + B^2}{p} + 4f^2 p^4. \quad (7.4.9)$$

Если ввести начальное значение  $\bar{e}_0^2$  функции  $\bar{e}^2$ , то  $A^2 + B^2 = p_0 (\bar{e}_0^2 - 4f^2 p_0^4)$ . Функция (7.4.9) имеет минимум при

$$p^5 = p_*^5 \equiv \frac{p_0 (\bar{e}_0^2 - 4f^2 p_0^4)}{16f^2}.$$

Если  $p_* > p_0$ , то минимум  $\bar{e}^2$  лежит в области реальных изменений параметров (ведь  $p$  монотонно увеличивается

от  $p_0$ ). Условие  $p_* > p_0$  эквивалентно следующему (несколько огрубляя, считаем, что  $\sqrt{e_0^2} = e_0$ ):

$$e_0 > 2 \sqrt{3} f p_0^2. \quad (7.4.10)$$

Итак, если начальный эксцентриситет  $e_0$  и безразмерное ускорение тяги  $f$  связаны неравенством (7.4.10), то текущий средний эксцентриситет оскулирующей орбиты

будет сначала уменьшаться до некоторого минимального значения, затем монотонно возрастать, так что при больших  $p$  будет  $e \sim 2fp^2$ . Если неравенство (7.4.10) не выполнено, эксцентриситет (в среднем) немедленно начинает возрастать.

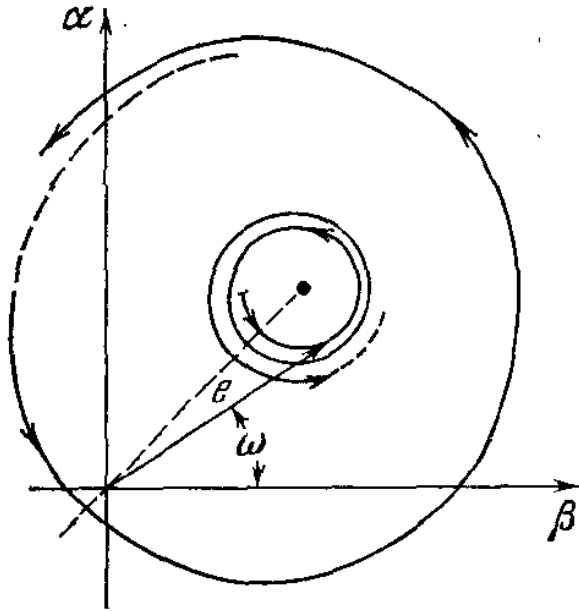
Нетрудно видеть также, что годограф вектора Лапласа описывается уравнением окружности

$$\left(\alpha - \frac{A}{\sqrt{p}}\right)^2 + \left(\beta - \frac{B}{\sqrt{p}}\right)^2 = 4f^2 p^4$$

переменного радиуса  $2fp^2$  с переменными координатами

Рис. 7.7. Годограф оскулирующего вектора Лапласа для траектории разгона (схематическое изображение).

$A/\sqrt{p}$ ,  $B/\sqrt{p}$  ее центра. С течением времени радиус окружности монотонно увеличивается, а центр монотонно (по прямой) стремится к началу координат. В результате годограф представляет собой развертывающуюся спираль, каждый виток которой проходится за «время»  $\Delta u = 2\pi$  (рис. 7.7). Радиус-вектор годографа по величине равен эксцентриситету  $e$  орбиты, а полярный угол — долготе  $\omega$  перигея орбиты. Рассматривая годограф (рис. 7.7), можно понять довольно непростое поведение обоих этих параметров.



О черк восьмой  
**СОЛНЦЕМ ПОЛНЫ ПАРУСА**

На полярных морях и на южных,  
По изгибам зеленых зыбей,  
Меж базальтовых снал и жемчужных  
Шелестят паруса кораблей.

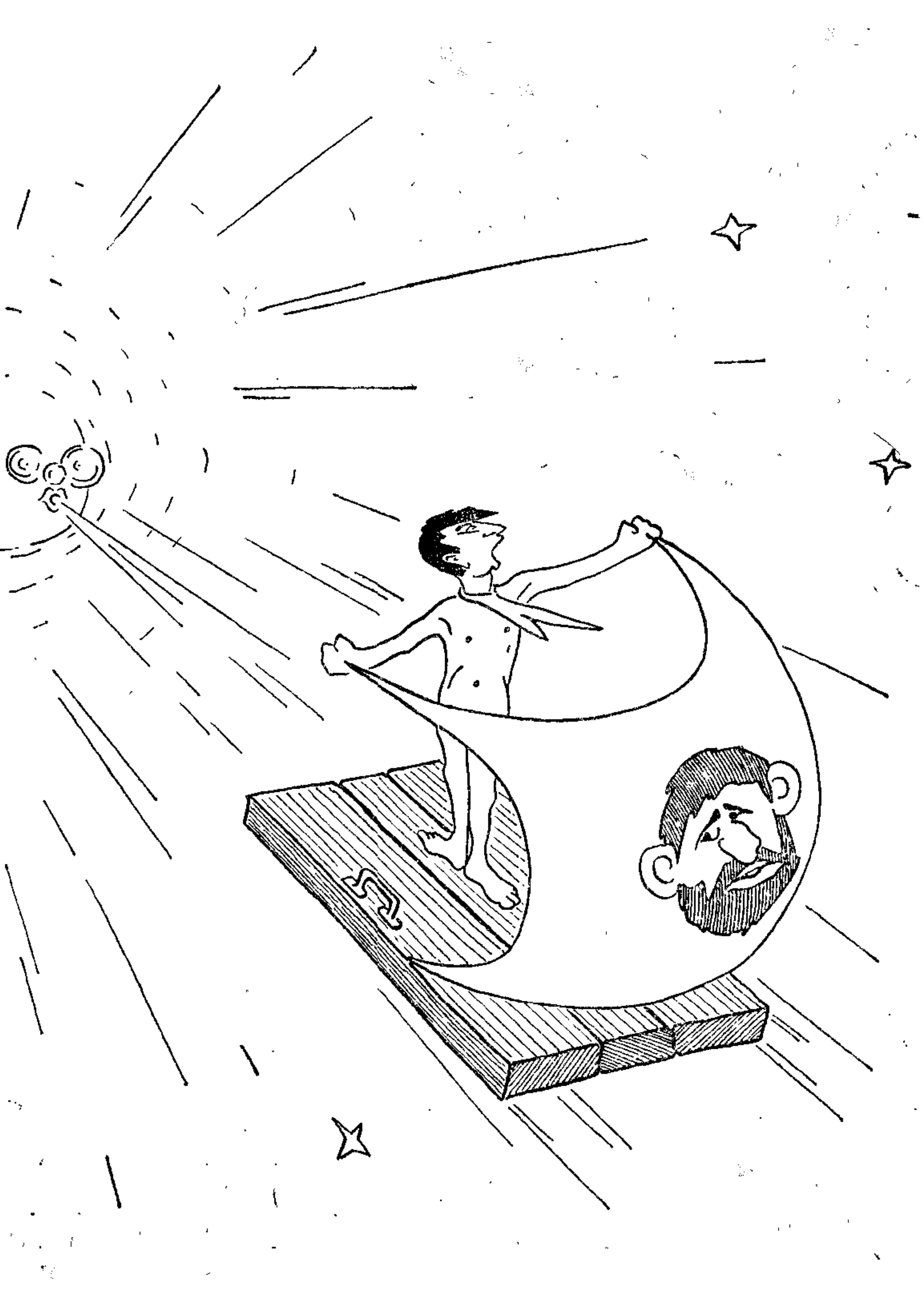
Быстрокрылых ведут капитаны,  
Открыватели новых земель...

Н. Гумилев  
«Капитаны»

*«Протяните ладони к Солнцу. Что вы чувствуете? Тепло, конечно. Но кроме него есть еще давление. Правда, такое слабое, что вы его не замечаете. На площадь ваших ладоней приходится всего около одной миллионной унции. Но в космосе даже такая малая величина играет важную роль, потому что она действует все время, час за часом, день за днем. И запас энергии, в отличие от ракетного горючего, неограничен. При желании можно ее использовать. Мы можем создать паруса, которые будут улавливать солнечное излучение».*

Эта цитата взята из научно-фантастического рассказа Артура Кларка «Солнечный ветер» [8.1]. В рассказе поэтично и научно достоверно описана гонка вокруг Земли яхт с солнечными парусами. Нам еще не раз придется цитировать этот рассказ (цитаты выделены курсивом). Предлагаемый очерк является как бы научным комментарием к рассказу А. Кларка.

Световое давление падающего потока солнечного излучения на орбите Земли составляет примерно  $p = 4,5 \times 10^{-8} \text{ Г/см}^2$ . Это ничтожная величина. Однако если космический аппарат снабдить парусом, достаточно легким и достаточно большого размера, то суммарная сила светового давления на парус может сообщить космическому кораблю ускорение, достаточное для маневрирования в пространстве. Например, разумно управляя парусом, можно разогнать космический корабль по спиральной



траектории вокруг Земли и, набрав параболическую скорость, улететь в открытый космос, к планетам! Об этом можно прочитать, например, в книге Г. Л. Гродзовского, Ю. Н. Иванова, В. В. Токарева [8.2], где дан обзор работ по анализу динамики полета аппаратов с солнечным парусом.

Мы в нашем анализе будем опираться на работу А. П. Скопцова [8.3] \*). Если парус плоский и обладает идеально отражающей зеркальной поверхностью, то результирующая сила светового давления, на него действующая, дается формулой

$$P = 2p (R_{\odot}/R)^2 S \cos^2 \theta = P_* \cos^2 \theta \quad (8.1)$$

и направлена по нормали  $\mathbf{n}$  к плоскости паруса \*\*). В формуле (8.1) обозначено:  $R$  — расстояние от Солнца до паруса, а  $R_{\odot}$  — от Солнца до Земли,  $S$  — площадь паруса,  $\theta$  — угол между направлениями результирующей силы и солнечных лучей. В дальнейшем будут рассматриваться лишь околоземные орбиты космических кораблей. Для таких орбит можно положить  $R_{\odot}/R = 1$ .

Однако парус не обязательно должен быть плоским. Мы поставим оптимальную задачу быстрого набора параболической скорости. Чтобы достичь параболической скорости за минимальное время, нужно соответственно управлять положением паруса в полете, но и конструкцию паруса можно выбрать так, чтобы способствовать минимизации времени разгона. Можно наилучшим образом управлять в полете плоским парусом, а можно наилучшим образом управлять парусом наилучшей конструкции; время полета во втором случае будет меньше, чем в первом.

Пусть  $\mathbf{K}_1$  — главный вектор количества движения светового потока, падающего на парус, а  $\mathbf{K}_2$  — отраженного от паруса светового потока. Результирующая сила  $\mathbf{P}$  светового давления

$$\mathbf{P} \sim \Delta \mathbf{K} = \mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_2.$$

Наилучшей конструкцией паруса является такая конструкция, при которой [8.3]

$$1) |\mathbf{K}_1| = |\mathbf{K}_2|;$$

\*) Пользуюсь случаем выразить признательность А. П. Скопцову за помощь в анализе и расчеты, сделанные специально для этого очерка.

\*\*\*) В книге [8.2] в соответствующей формуле (2.53) содержится ошибка, которая привела к неверному виду диаграммы 2.39.

2) величина  $|K_1|$  не зависит от направления  $K_2$ .

При этом (рис. 8.1)  $|\Delta K| = 2|K_1| \cos \theta$ , и тогда величина суммарной силы светового давления зависит от угла  $\theta$  следующим образом:

$$P = P_* \cos \theta, \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2. \quad (8.2)$$

Закону (8.2) соответствует круговая диаграмма изменения силы в зависимости от угла  $\theta$  (рис. 8.1). На том же

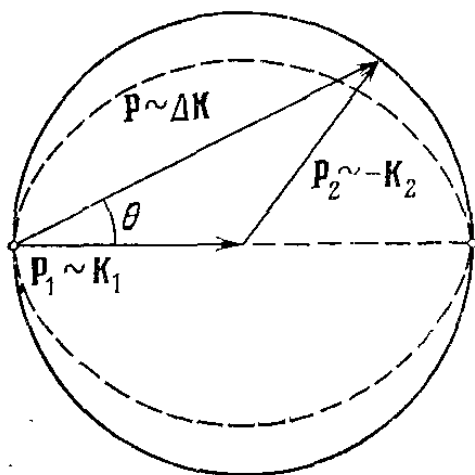


Рис. 8.1. Условия для наилучшей конструкции солнечного паруса.

рисунке (штриховая линия) приведена диаграмма сил (8.1) для плоского паруса. Диаграммы не очень, хотя и заметно, отличаются. Конкретные конструкции «наилучшего паруса» неоднозначны. Один из возможных вариантов описан в [8.3]\*). Если наилучший парус и плоский парус обладают одной и той же максимальной тягой  $P_*$ , то при любом  $\theta$  наилучшему парусу можно сопоставить плоский парус, расположенный нормально к тяге  $P$  наилучшего

паруса. Тогда плоский парус будет давать тягу в том же направлении, что и наилучший парус (однако по величине тяга плоского паруса будет несколько меньше).

Напишем уравнение движения в полярных координатах  $\varphi, r$ . Предположим, что направление  $\varphi = 0$  совпадает с направлением солнечных лучей (рис. 8.2). Солнце можно считать неподвижным в пространстве, так как наш полет продлится недолго (несколько суток). Обозначим, как обычно, через  $u, v$  радиальную и трансверсальную составляющие скорости корабля. Согласно предыдущему действующая на корабль тяга складывается векторно из двух сил:  $P_1$  и  $P_2$ ; сила  $P_1$  постоянна по величине и направлению (вдоль солнечных лучей); ее радиальная и трансверсальная компоненты соответственно равны  $\frac{P_*}{2} \cos \varphi,$

\*) Забавно отметить, что эта конструкция в качестве составного элемента содержит «гиперболоид инженера Гарина», описанный в одноименном фантастическом романе А. Толстого: два софокусных параболоида, обращенных «чашами» друг к другу и имеющих сильно различающиеся фокусные расстояния.



—  $\frac{P_*}{2} \sin \varphi$ . Сила  $P_1$  образует с радиальным направлением некоторый угол — пусть  $\gamma$ . Компоненты этой силы суть  $\frac{P_*}{2} \cos \gamma$ ,  $\frac{P_*}{2} \sin \gamma$ .

Обозначим через  $a_0 = P_*/m$  максимальное ускорение, развиваемое наилучшим парусом. Уравнения движения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{v^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \frac{a_0}{2} (\cos \gamma + \cos \varphi) f(r, \varphi), \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{uv}{r} + \frac{a_0}{2} (\sin \gamma - \sin \varphi) f(r, \varphi), \\ \frac{dr}{dt} &= u, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{v}{r}. \end{aligned} \right\} (8.3)$$

Здесь  $\mu$  — гравитационный параметр Земли. Уравнения (8.3) содержат существенный фактор — «функцию тени»  $f(r, \varphi)$ . Ведь сила светового давления может действовать на парус только вне земной тени. Если корабль зашел в тень Земли, то, естественно, светового давления он испытывать не будет. Поэтому компоненты силы светового давления домножены на функцию  $f$ , которая равна нулю в тени Земли и единице вне тени. Тень Земли — сложная вещь; ее граница не определяется четко из-за наличия полутени, из-за рассеивающего действия атмосферы Земли. Поэтому в качестве функции тени  $f$  лучше взять не «релейную» функцию типа 0—1, а какую-то непрерывную функцию, аппроксимирующую реальные свойства тени, типа функции, изображенной на рис. 8.3. В работе [8.3] используется, например, функция

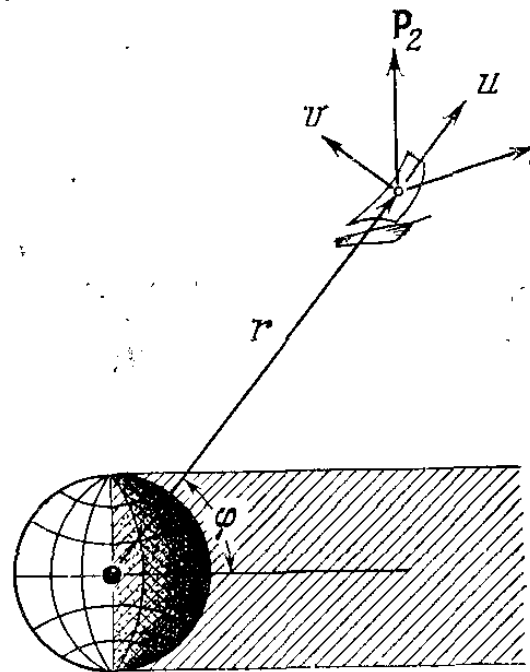


Рис. 8.2. Система координат.

$$f(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \alpha \left( \sqrt{1 - \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2} - \cos \varphi \right) + \frac{1}{2}, \quad (8.4)$$

где  $\alpha$  — параметр, выбор которого определяет скорости возрастания функции тени при переходе ее границы (то есть длину участка полутени на рис. 8.3).

Уравнения (8.3) содержат свободную функцию  $\gamma(t)$ . Функцией  $\gamma(t)$  следует распорядиться так, чтобы разгон

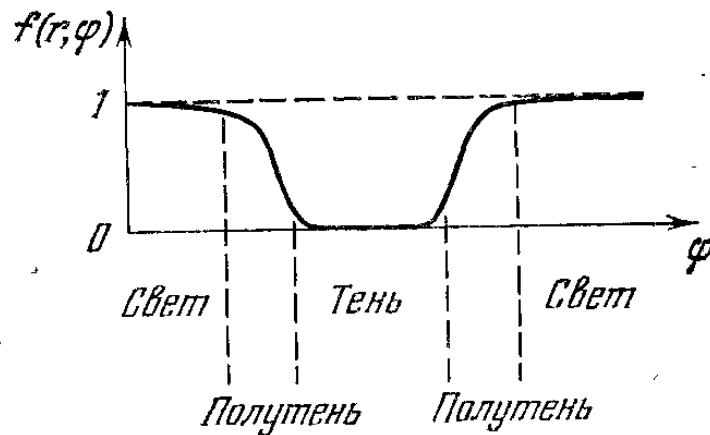


Рис. 8.3. Функция тени.

нашего парусника до параболической скорости происходит за минимальное время. В работе [8.3] рассмотрено такое оптимальное управление парусом. Оно довольно сложно. Однако, как показано там же, результат (время разгона) оказывается очень близким к тому, что получается при так называемом *локально-оптимальном управлении*. Это такое управление  $\gamma(t)$ , которое в каждой точке фазового пространства дает максимальный прирост энергии  $\tilde{h} = u^2 + v^2 - 2\mu/r$ .

Составим производную

$$\frac{d\tilde{h}}{dt} = a_0 f (u \cos \gamma + v \sin \gamma + u \cos \varphi - v \sin \varphi).$$

Максимум производной по управлению  $\gamma$  достигается на управлении

$$\cos \gamma = u/V, \quad \sin \gamma = v/V, \quad V = \sqrt{u^2 + v^2}. \quad (8.5)$$

В этом случае сила  $\mathbf{P}_2$  направлена по вектору скорости корабля. При этом

$$\frac{d\tilde{h}}{dt} = a_0 f (V + V_s), \quad (8.6)$$

где  $V$  — модуль полной скорости корабля, а  $V_s$  — проекция вектора скорости на направление солнечных лучей. Так как  $V + V_s \geq 0$ , то из (8.6) следует монотонное возрастание энергии  $\tilde{h}$ , что гарантирует достижение любого

значения этой энергии, в частности выход на параболическую скорость.

Назовем управление (8.5) локально-оптимальным и будем рассматривать впредь уравнения движения (8.3), (8.4) с управлением (8.5). Получилась интересная задача динамики, являющаяся суперпозицией двух уже известных нам задач: движение при совместном действии постоянного по величине и направлению в пространстве ускорения и постоянного касательного ускорения. Абсолютные величины этих ускорений в нашем случае одинаковы.

Во всеоружии уравнений движения (8.3) — (8.5) мы теперь можем заняться динамическим анализом рассказа Л. Кларка.

*«Снасти дрожали от натуги: межпланетный ветер уже наполнил огромный круглый парус. До старта осталось три минуты... Зеркальная гладь исполинского паруса блестела и искрилась на Солнце. Невесомо парящему у перископа Мертону казалось, что парус заслонил все небо. Ничего удивительного — пятьдесят миллионов квадратных футов соединено с его капсулой чуть не сотней миль такелажа. Если бы сшить вместе паруса всех клиперов, какие в прошлом белыми тучками летели над Индийским океаном, то и тогда они не сравнялись бы с парусом, в который «Диана» ловила солнечный ветер. А вещества в нем чуть больше, чем в мыльном пузыре: толщина этих двух квадратных миль алюминированного пластика — всего лишь несколько миллионных дюйма».*

Пятьдесят миллионов квадратных футов — это 4,65 квадратного километра, что соответствует круглому парусу с диаметром 2,4 километра! Только при таких огромных размерах солнечного паруса можно надеяться получить ускорения, достаточно большие для маневрирования в пространстве. При этом парус должен быть как можно легче и, значит, как можно тоньше. Ведь сила давления пропорциональна площади паруса, а ускорение получается делением этой силы на массу всего корабля (вместе с парусом). Поэтому ясно, как важно уменьшить вес паруса. Создание паруса очень большой площади и очень малой толщины — главная техническая трудность в осуществлении полетов под солнечными парусами.

Парус «Дианы», несмотря на ничтожную толщину (порядка одной десятитысячной миллиметра), должен бы

весить 700—1000 кг! (Удельный вес алюминированной пластиковой пленки  $1,2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ .) Мыльный пузырь, о котором говорит Кларк, естественно, должен иметь размеры, близкие к размеру паруса... Если вес остальной части корабля (такелаж, кабина, космонавт и т. д.) составляет  $1 \div 1,5$  тонны, то ускорение, сообщаемое кораблю, может достигать  $\sim 10^{-3} g$ . Именно яхты такого «класса» участвуют в гонках у А. Кларка. Их семь, и гонки полны драматизма. Но здесь не место описанию приключений на трассе гонок и судьбы мужественного капитана «Дианы» Джона Мертонна. Нас интересует механика полета, и нам достаточно проследить за движением одной-двух яхт.

*«На четырех обитаемых планетах наберется от силы два десятка человек, умеющих управлять солнечной яхтой, и все они сейчас здесь, кто на линии старта, кто на борту эскортирующих судов, кружатся вместе по орбите в двадцати двух тысячах миль над экватором».*

Исходная орбита, по-видимому, круговая. Кроме того, она суточная: период обращения спутника на суточной орбите равен периоду вращения Земли (24 часа). На экваториальной суточной орбите спутника все время «висит» над одной и той же географической точкой Земли. Радиус суточной круговой орбиты  $r_0 \approx 42\,190 \text{ км}$ . Если учесть, что радиус Земли  $R_{\oplus} \approx 6370 \text{ км}$ , то высота орбиты над поверхностью Земли  $h = 35\,820 \text{ км}$ , или 22 260 миль — как раз, округленно, те 22 тысячи миль, о которых говорится у Кларка. Несколько позже в рассказе упоминается о движении именно по суточной орбите. Поэтому в качестве начальных данных для интегрирования уравнений движения (8.3) — (8.5) возьмем данные, отвечающие суточной круговой орбите:

$$r_0 = 42\,188 \text{ км}, \quad u_0 = 0, \quad v_0 = \sqrt{\mu/r_0} \quad (8.7)$$

(последняя формула, как известно, определяет круговую скорость на орбите радиуса  $r_0$ ). Начальный угол  $\varphi_0$  выберем позже.

*«Семь сверкающих ножей перерезали семь тонких линий, привязывающих яхты к базам, на которых их собрали и обслуживали. До этой секунды все в строгом строе летели вокруг Земли; теперь яхты начнут расходиться, словно*

влекомые ветром семена одуванчика. Победит та, которая первой достигнет орбиты Луны.

На «Диане» как будто ничего не изменилось. Но Мертон знал, что это не так. Хотя он не ощущал тяги, приборная доска говорила ему, что ускорение приближается к одной тысячной  $g$ . Для ракеты смехотворно мало, но для солнечных яхт это было рекордом. «Диана» хорошо сконструирована, огромный парус оправдывает надежды, которые он на него возлагал. При таком ускорении после двух кругов он разовьет достаточную скорость, чтобы покинуть околоземную орбиту. А затем, подгоняемый всей мощью Солнца, он пойдет курсом на Луну».

Так как цель гонок — Луна, то естественно считать, что гонки проходят в плоскости лунной орбиты (или, приближенно, в плоскости эклиптики). Будем считать, что исходная суточная орбита лежала в этой плоскости. Этому не противоречит упоминание о яхтах, движущихся над экватором: можно полагать, что в момент описания трасса яхт пересекала экватор. Примерный вид трассы суточного эклиптического спутника (то есть след его радиуса-вектора на поверхности Земли) изображен на рисунке 8.4. Из приведенного отрывка следует также, что в уравнениях (8.3) нужно положить

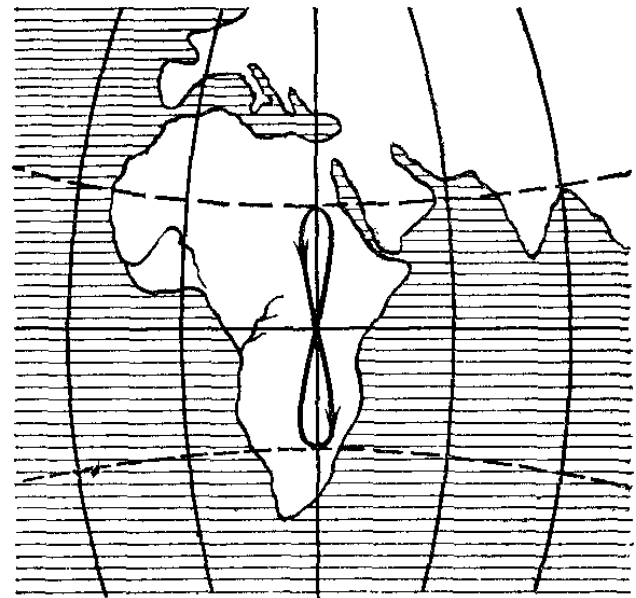


Рис. 8.4. Трасса суточного эклиптического спутника.

$$a_0 = 0,001g, \quad (8.8)$$

ибо таково (примерно) максимальное ускорение «Дианы» за счет силы светового давления (конечно, в цитате речь идет именно об этом, а не о суммарном ускорении от сил светового давления и гравитационных).

Начальное положение яхт на суточной орбите определим углом

$$\varphi_0 = -\pi/2. \quad (8.9)$$

Значение  $\varphi_0$  (8.9) совершенно однозначно следует из анализа информации, содержащейся в рассказе А. Кларка;

мы это увидим в дальнейшем. Данных (8.7) — (8.9) достаточно для численного интегрирования уравнений движения (8.3) — (8.5). Результат этого интегрирования — траектория яхты Джона Мертона — изображен на рис. 8.5. На этом рисунке обратим прежде всего внимание на то, что до набора параболической скорости «Диана» сделает

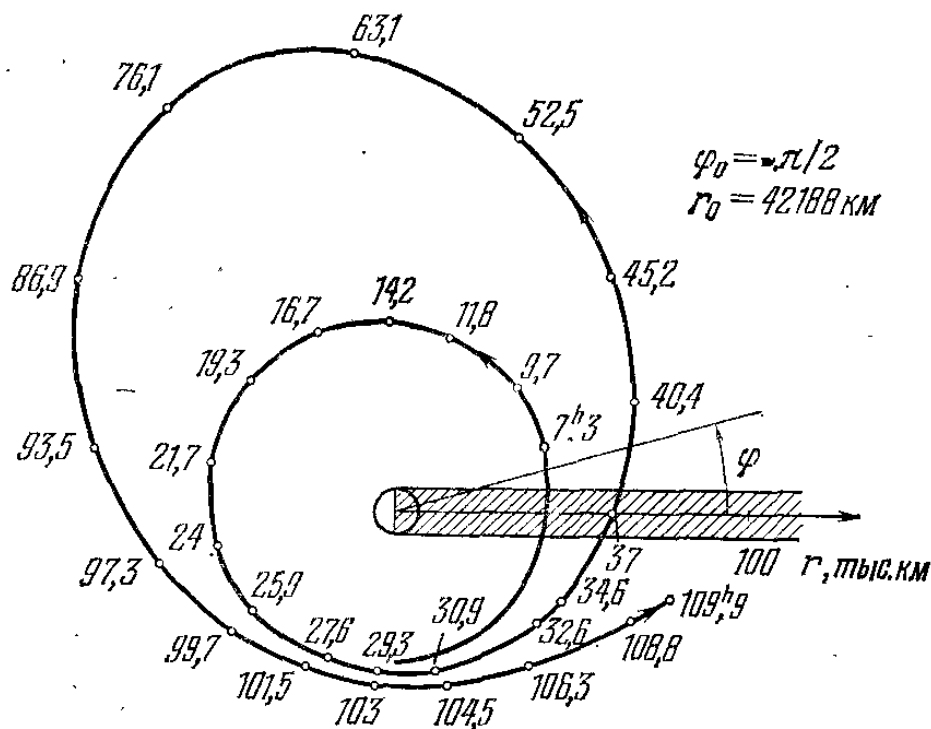


Рис. 8.5. Траектория «Дианы».

лишь немногим более двух витков вокруг Земли — в полном соответствии с утверждением А. Кларка, только что цитированным. Правда, в другом месте у А. Кларка содержится неточность:

*«За два дня будет достигнута вторая космическая скорость»* — и весь рассказ построен на предположении, что разгон до параболической скорости занимает примерно двое суток. На самом деле у Мертона на это уйдет около 120 часов, то есть 5 суток (время полета проставлено вдоль траектории на рисунке). При этом на первый виток уйдет около 30 часов (более суток), а все остальное полетное время съест сильно вытянутый второй виток орбиты...

Существенно уменьшить время полета невозможно, так как наша программа полета, как уже говорилось, очень близка к оптимальной, обеспечивающей наибо-  
стрейший разгон. Но простим А. Кларку неточность хронометража: ведь «Солнечный ветер» не диссертация, а художественный рассказ, в котором допустимы некото-  
рые вольности. Зато какой научной достоверностью бли-  
стают другие детали рассказа...

«Диана» хорошо начала гонки; теперь можно взглянуть и на соперников... Вот они, будто невиданные серебристые цветки среди черных полей космоса... Присланный Марсианской республикой «Солнечный Луч» представлял собой плоское кольцо с полумильным отверстием; кольцо медленно вращалось, и центробежная сила придавала ему устойчивость. Идея старая, но никому еще не удавалось успешно осуществить ее. Мертон мог бы поклясться, что экипаж помучается с парусом, когда надо будет поворачивать.

Правда, оставалось еще шесть часов до той поры, когда яхты завершат первую четверть своего медленного, величавого полета по суточной орбите. Сейчас, в самом начале гонок, они идут от Солнца, так сказать, с попутным солнечным ветром. Надо выжать все из этого галса, пока яхты не обогнут Землю и Солнце не окажется впереди».

Шесть часов на первую четверть полета, если понимать под этим изменение полярного угла  $\varphi$  на  $90^\circ$ , — почти точное число. Если бы не было паруса, это было бы совершенно точно. Изменения орбиты на начальном участке

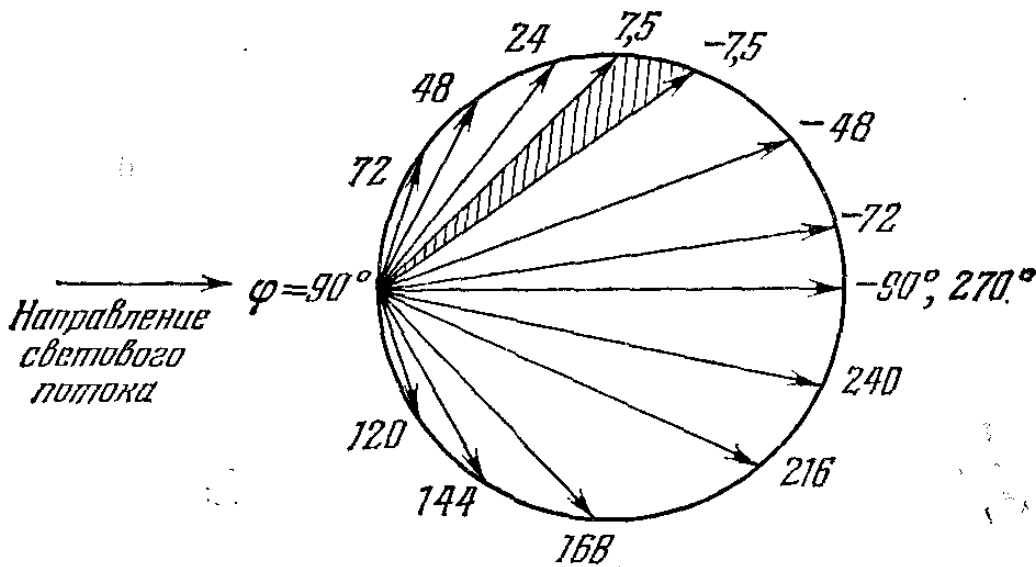


Рис. 8.6. Годограф возмущающего ускорения «Дианы».

полета за счет влияния паруса не могут быть слишком велики (не успевают накопиться). С учетом влияния паруса на прохождение первой четверти витка затрачивается около 6 часов 5 минут. Что касается того, чтобы «выжать все из этого галса», то, действительно, на начальном участке ускорение от светового давления максимально или близко к максимальному; парус почти нормален к солнечным лучам. На рис. 8.6 изображен годограф ускорения светового давления вдоль траектории «Дианы». Ее

плоский парус должен быть всегда нормален к вектору ускорения, отложенному на годографе рис. 8.6.

От момента старта ( $\varphi = -90^\circ$ ), когда парус нормален к солнечным лучам, а ускорение от тяги максимально (равно  $a_0 = 0,001g$ ), до момента входа в земную тень ( $\varphi = -7^\circ,5$ ) парус повернулся меньше чем на  $40^\circ$ , а ускорение тяги упало лишь на 20% (до  $0,8a_0$ ).

*«... Крохотные брашпили непрерывно вращались, то выдавая, то выбирая фалы по команде автопилота, который держал парус под нужным углом к Солнцу...*

*Земли почти не видно, остался только узенький яркий серп, стремящийся к Солнцу. Рядом с пламенной дугой тускло обрисована ночная сторона планеты; тут и там в просветах между тучами поблескивает зарево больших городов. Темный диск уже заслонил часть Млечного Пути, через несколько минут он начнет закрывать Солнце.*

*Свет угасал; по мере того как «Диана» бесшумно погружалась в тень Земли, парус загорался сумеречным пурпурным оттенком — отблеском многократных закатов, удаленных на тысячи миль. Солнце кануло за невидимый горизонт, и в несколько минут сгустилась ночь.*

*Мертон посмотрел назад вдоль орбиты, по которой прошел уже четверть пути вокруг родной планеты. Одна за другой гасли яркие звездочки остальных, когда они следом за ним ныряли в быстротечную ночь. Какой-нибудь час — и Солнце опять покажется из-за огромного черного щита; до тех пор все они беспомощны, должны идти по инерции».*

Итак, до входа в тень Земли яхты прошли четверть витка — вот оно, начальное значение (8.9):  $\varphi_0 = -90^\circ$ , взятое нами для интегрирования уравнений движения. Точнее, надо было бы взять  $\varphi_0 = -97^\circ,5$ , чтобы до входа в тень пройти ровно четверть витка, ибо угловое перемещение яхт поперек всей тени составит около  $15^\circ$ . Но не будем гнаться за скрупулезной точностью в реставрации гонок — ведь не сказано, что яхта прошла до входа в тень точно четверть витка; можно думать, что она прошла почти четверть витка... существенного значения это не имеет (в чем автор убедился, сделав все-таки расчет траектории для  $\varphi_0 = -97^\circ,5$ ). Заметим еще, что время прохождения зоны тени составляет действительно около часа, как указано в приведенном выше отрывке; через час яхта выходит из тени...



*«Отныне и на протяжении почти половины околоземной орбиты надо держать всю эту огромную плоскость ребром к Солнцу. В ближайшие двенадцать-четырнадцать часов парус будет только помехой, ведь яхта пойдет навстречу Солнцу и его лучи могут отбросить ее назад».*

Опять обратимся к диаграмме ускорений «Дианы» на первом витке (рис. 8.6). Действительно, на значительной части полувитка орбиты плоскость паруса почти параллельна солнечным лучам. Так, от  $\varphi = 48^\circ$  до  $\varphi = 144^\circ$  наклон плоскости паруса к направлению светового потока не превышает  $20^\circ$ . На большом участке орбиты (от  $\varphi = 24^\circ$  до  $\varphi = 168^\circ$ ), где движение идет более или менее «против Солнца», наклон плоскости паруса к потоку солнечных лучей не превышает  $35-45^\circ$ . Этот участок проходится за 14 часов. Строго ребром к Солнцу парус находится в единственной точке ( $\varphi = 96^\circ$ ). В этой точке тяга паруса равна нулю.

*«Жаль, что нельзя совсем убрать парус, пока он не понадобится вновь».*

Неоправданные сожаления. Без паруса набор энергии тотчас же прекратился бы. А так, хотя и медленно, но энергия монотонно увеличивается.

Отметим, что общий характер локально-оптимального управления парусом очень близок к такому простому управлению: парус непрерывно вращается в ту же сторону, в какую движется корабль, но с угловой скоростью, вдвое меньшей угловой скорости движения корабля. Иначе, если  $\theta$  — угол между нормалью к парусу и направлением солнечных лучей, то локально-оптимальное управление близко к следующему:

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}. \quad (8.10)$$

При этом предполагается, что обе стороны паруса обладают одинаковой отражающей способностью (иначе, вместо (8.10), можно написать аналогичное кусочно-линейное по  $\varphi$  управление). На рис. 8.7 изображена зависимость  $\theta(\varphi)$  для траектории яхты «Диана». Видим, что отклонения от закона (8.10) не превышают  $5^\circ$ .

«...Через несколько минут число участников сократилось до четырех. Мертон усомнился в конструкции «Солнечного луча», как только увидел его, теперь сомнения оправдались.

Вращение сделало марсианскую яхту слишком устойчивой, она не хотела лавировать. Вместо того, чтобы

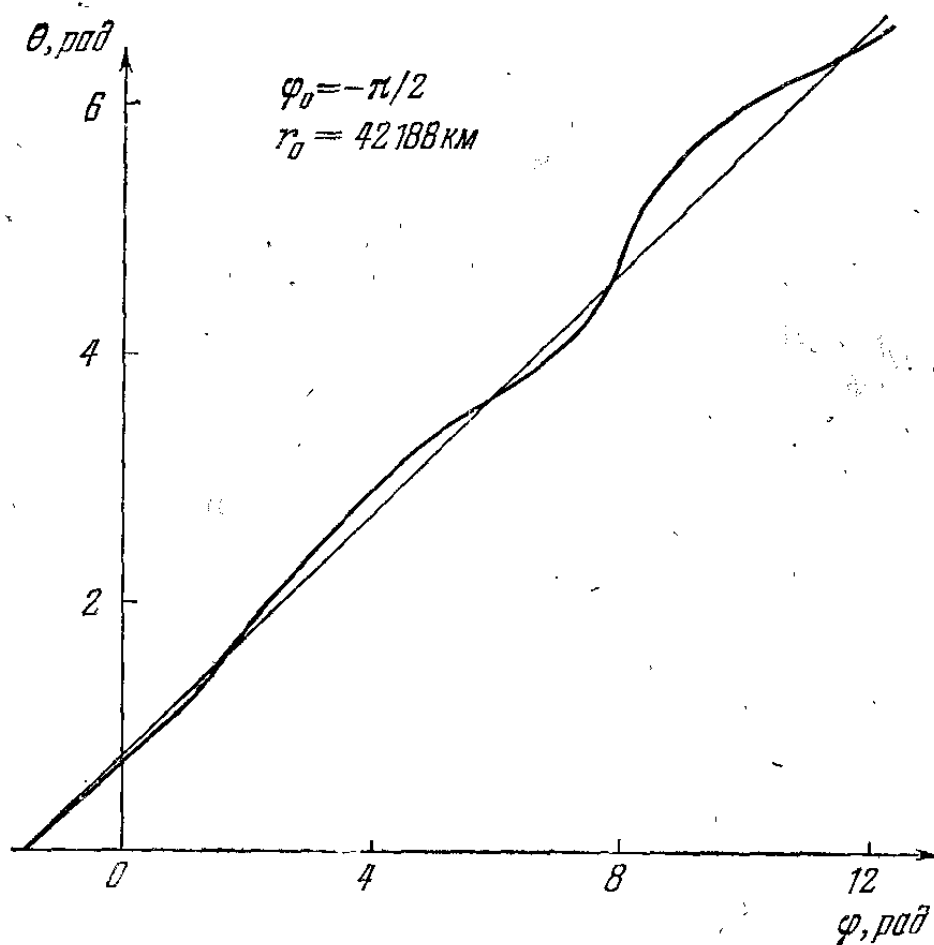


Рис. 8.7. Закон управления парусом вдоль траектории яхты «Диана».

повернуться ребром к Солнцу, огромное кольцо смотрело на него всей плоскостью, и яхту погнало обратно с предельным ускорением».

Для упрощения рассуждений примем, что парус «Солнечного луча» из-за чрезмерной устойчивости совершенно не менял положения в пространстве. Тогда вектор ускорения от светового давления постоянен по величине и направлению. Но такую задачу [8.4, 8.5] мы уже разбирали в очерке третьем и видели, что действительно существуют траектории, «заворачивающие обратно», — хотя бы траектория типа, изображенного на рис. 3.15. Если экипажу «Солнечного луча» не удастся справиться с управлением парусом, то они не смогут увеличить энергию и достигнуть

параболической скорости; им придется «болтаться» в окрестности Земли по ограниченной траектории, вроде изображенной на рис. 3.15.

Как мы помним по очерку третьему, тип траектории в этом случае определяется значением постоянных  $h/\sqrt{f}$ ,  $c$  (рис. 3.4). Для наших начальных данных (8.7) — (8.9) получим

$$c = -\frac{1}{2} f = -\frac{a_0}{2g \left(\frac{R_\oplus}{r_0}\right)^2} \approx -0,022,$$

$$h = -0,5, \quad h/\sqrt{f} = -0,5/\sqrt{0,044} = -2,380.$$

Эта точка на плоскости  $h/\sqrt{f}$ ,  $c$  попадает как раз в область ограниченных «змеобразных» траекторий, так что световое давление обязательно «сдует» яхту «Солнечный луч»,

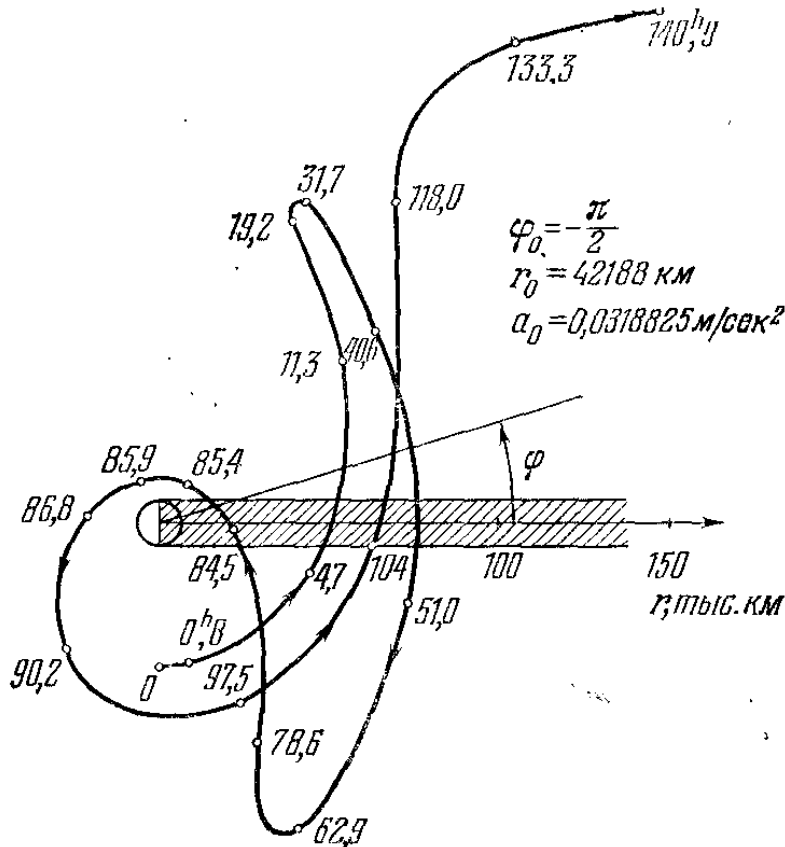


Рис. 8.8. Траектория яхты «Солнечный луч».

не дав ей сделать даже одного витка вокруг Земли! (Однократное вхождение в тень Земли здесь не играет существенной роли.) На рис. 8.8 изображена рассчитанная траектория подобной яхты (но с большим значением максимального ускорения  $a_0$ ).

Надо сказать, что и при разумном управлении парусом не всегда удастся избежать подобных неприятностей.

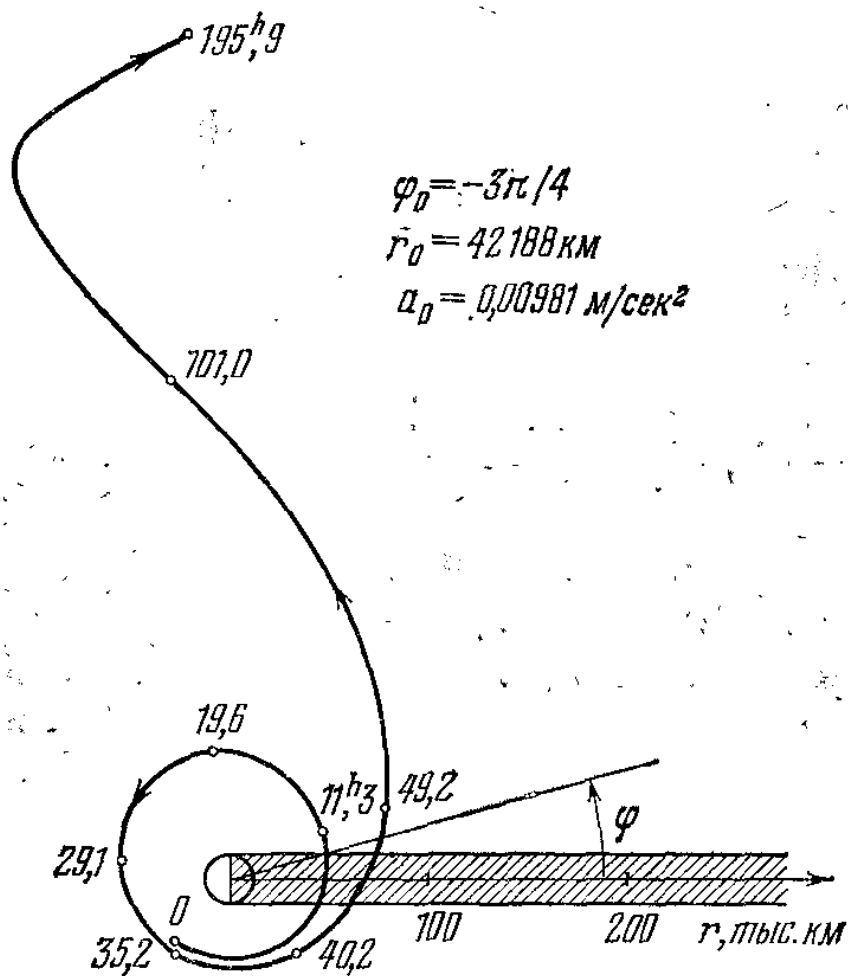


Рис. 8.9. Траектория разгона против Солнца.

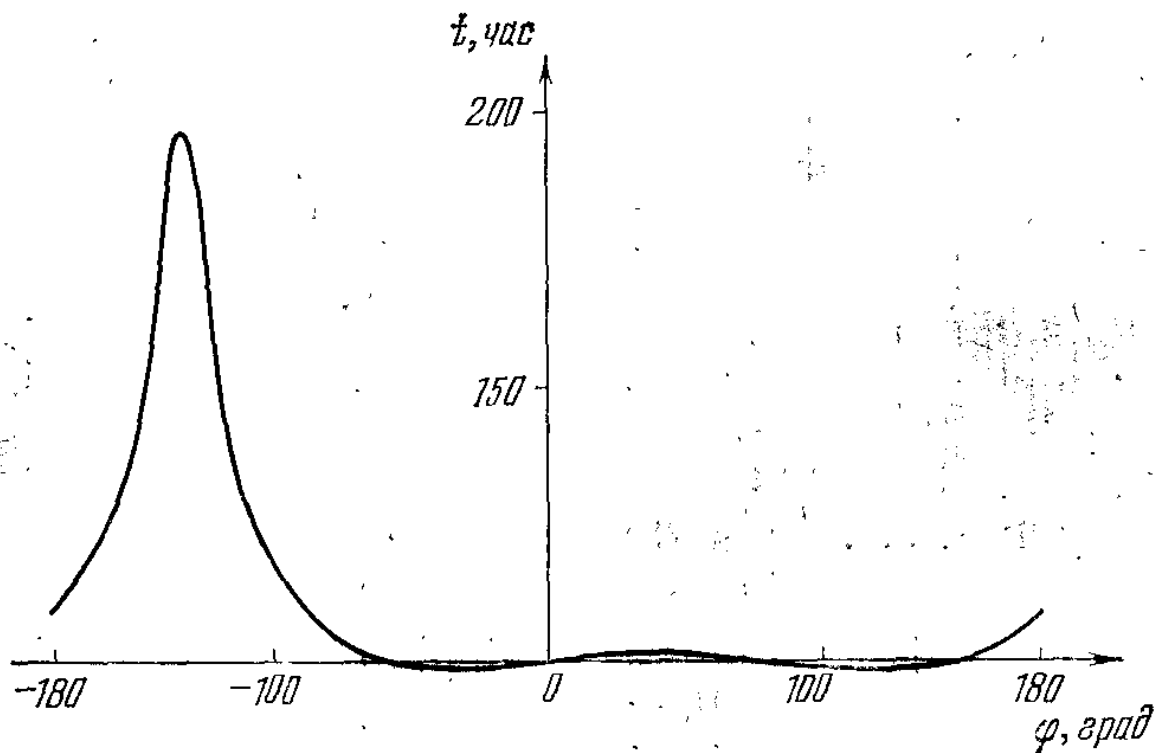


Рис. 8.10. Зависимость времени разгона от места старта с суточной орбиты.

Если место старта на исходной круговой орбите выбрано неудачно, то движение по участку набора параболической скорости может оказаться происходящим навстречу Солнцу; это раза в два увеличивает время выхода на параболическую скорость! На рис. 8.9 изображено, что произошло бы с яхтой Мертона, если бы точка старта на орбите отвечала  $\varphi_0 = -135^\circ$ . Любопытно, что если разгон начинать в тени Земли ( $\varphi_0 = 0$ ), то удалось бы сэкономить около 10 часов по сравнению с временем разгона при  $\varphi_0 = -90^\circ$ . Зависимость времени разгона (при локально-оптимальном управлении) от места старта изображена на рис. 8.10.

Вернемся, однако, к гонкам.

*«Итак, все свелось к поединку между «Дианой» и «Лебедевым»... По чести говоря, Мертону казалось, что и «Лебедеву» уже не догнать «Дианы», и все-таки он нервничал на втором витке, когда вновь наступило затмение, а затем опять начался долгий, медленный дрейф против солнечного ветра.*

*Он знал русских водителей и конструкторов. Они не первый раз участвовали в гонках. До сих пор им не удавалось победить. Но ведь их соотечественник Петр Николаевич Лебедев в начале двадцатого столетия первым открыл световое давление солнечных лучей. Естественно, что они упорствуют. Дмитрий (Марков, капитан «Лебедева». — В. Б.), наверно, задумал что-нибудь эффективное...*

*Если ничего не изменится, это будет последний виток для него и для русских. Под напором солнечного ветра они поднялись по спирали на тысячи миль. На втором витке они преодолеют земное тяготение и устремятся в долгий путь к Луне... К счастью, самые трудные маневры позади, отныне «Диане» все время идти прямо по ветру. Как говорили в старину моряки, легко справляться с судном, когда ветер дует тебе в спину».*

Снова приходится поражаться достоверности описания траектории яхты. На рис. 8.5 видно, что в момент набора параболической скорости вектор скорости «Дианы» составляет с направлением солнечных лучей угол около  $25^\circ$ , а вектор тяги и того меньше (около  $15^\circ$ ). При дальнейшем движении по траектории ухода эти углы могут только уменьшаться: «ветер в спину». А ведь мы знаем, что участок выхода на параболическую скорость вовсе не

обязательно расположен «по ветру», — может быть и наоборот, если неудачно выбрана точка старта на исходной орбите.

*«И тут на пятидесятом часу гонок, когда завершался второй виток, Марков поднес ему сюрприз.*

*— Алло, Джон, — небрежно сказал он, включившись в межъяхтенную сеть, — посмотри-ка, тебе, наверное, будет интересно.*

*Мертон подвинулся к перископу и включил предельное увеличение. В поле зрения, такой неправдоподобный среди звезд, очень маленький, но очень четкий, мальтийским крестом засверкал «Лебедев». Вдруг на глазах у него все четыре крыла отделились от квадрата в середине и ушли в космос.*

*Теперь, когда Марков набрал вторую космическую скорость и не нужно было больше терпеливо крутить по околоземной орбите, копя кинетическую энергию, он сбросил излишнюю массу. С этой минуты «Лебедев» почти неуправляем, но это неважно, все сложные маневры позади. Все равно как если бы какой-нибудь яхтсмен прошлого намеренно освободил лодку от руля и тяжелого килля, зная, что дальше его ждут попутный ветер и тихое море».*

О неточности хронометража («на пятидесятом часу гонок») уже говорилось выше. Но вот вопрос: насколько эффективен эффектный маневр Маркова — сброс части паруса? (Другая часть, квадратная, осталась.) Намек на ответ содержится в том факте, что «яхтсмены прошлого» сбрасывали тяжелый киль, а вовсе не движитель-парус. Надо сказать, что Марков выбросил в космос не только излишки паруса, но и второго пилота своей яхты (сопровождающий корабль подберет!).

*«Мертон... торопливо обрабатывал новые данные. Закончив вычисления, он убедился, что исход гонок далеко не решен».*

Интересно было бы проделать вслед за Мертоном такие вычисления. Увеличится ли ускорение яхты Маркова? Предоставляю читателю самому решить эту задачку.

## ГРАВИЛЁТ

...Индикатор показывал, что бак сух и топлива не осталось ни капли... Круг несколько минут повисел без движения, привыкая к этой мысли. Топлива нет. Тогда как же, черт побери, он попадет на корабль? И тут он впервые понял, что, может статься, он туда вовсе и не попадет...

...И тогда он совершил очередной нелогичный поступок... сделал то, что делает всякий утопающий: поплыл. Он плыл, хотя это было крайней глупостью — плыть в пространстве, где не от чего было оттолкнуться. Он выбрасывал вперед руки и делал ногами движения, какие делает пловец. Скваммер послушно загребал пустоту своими широкими броневыми ладонями, шевелил тяжелыми ногами — плыл, плыл...

*В. Михайлов*  
«Среди звезд»

### 1. Притяжение тела конечных размеров

Обычно нет надобности помнить, что спутник, летающий по орбите вокруг Земли, — тело, а не материальная точка. При расчетах орбит об этом, как правило, и не вспоминают. Но факт остается фактом: сила притяжения Земли, действующая на тело, отличается от силы, действующей на материальную точку той же массы, что и тело, расположенную на том же расстоянии от центра Земли, что и центр масс тела. Из этого очевидного, но легко забываемого факта могут следовать удивительные выводы!

Рассмотрим, например, гантелеобразный спутник (рис. 9.1) с двумя одинаковыми шариками массы  $m/2$  каждый; массой соединяющего стержня пренебрежем. Пусть стержень перпендикулярен к направлению центр гантели — центр Земли. Пусть расстояние от центра масс спутника (то есть от середины стержня) до центра Земли есть  $r$ , полудлина гантели  $l$ ,  $R = \sqrt{l^2 + r^2}$  — расстояние от шарика до центра Земли. На каждый шарик действует ньютоновская сила, определяемая силовыми функциями

$U_1 = U_2 = \mu m / 2R$ , и суммарная силовая функция

$$U = \frac{\mu m}{\sqrt{l^2 + r^2}} = \frac{\mu m}{r \sqrt{1 + \alpha^2}}, \quad \alpha = \frac{l}{r}. \quad (9.1.1)$$

Если спутник не обладает сверхгигантскими размерами, то величина  $\alpha$  (и тем более  $\alpha^2$ ) очень мала (сравним хотя бы  $l = 7 \text{ м}$  и  $r \approx 7\,000\,000 \text{ м}$ ). Так что силовая функция  $U$  близка к силовой функции  $U_{\text{н}} = \mu m / r$  притяжения Землею материальной точки массы  $m$ , помещенной в центр масс нашей гантели. На каждый шарик действует ньютоновская сила

$$F_i = \frac{\mu m}{2R^2} = \left| \frac{\partial U_i}{\partial R} \right|. \quad (9.1.2)$$

Каждая из сил  $F_1, F_2$  направлена к центру Земли. Суммарная сила определяется из параллелограмма сил (рис. 9.1) и по модулю оказывается равной

$$F = \left| \frac{\partial U}{\partial r} \right| = \frac{\mu m}{r^2} \frac{1}{(1 + \alpha^2)^{3/2}}. \quad (9.1.3)$$

Суммарная сила  $F$  в нашей схеме направлена к центру притяжения и почти равна «обычной» ньютоновской силе  $F_{\text{н}} =$

Рис. 9.1. Притяжение гантели ньютоновским центром.

$= \mu m / r^2$ . Почти, но не совсем! Сила  $F$  меньше, чем сила  $F_{\text{н}}$ . Иначе говоря, эффект протяженности тела в данном случае как бы вносит добавочную отталкивающую радиальную силу. И хотя эта добавочная сила в случае малых спутников практически неощутима, но она есть! И для больших спутников может стать более заметной. Этот факт и лег в основу нового и несколько неожиданного способа маневров в космическом пространстве, который был предложен автором книги и М. Е. Гиверцем [9.1, 9.2].

## 2. Пульсирующий космический корабль

Ход наших рассуждений сводится к трем пунктам:

1) Сила тяготения, действующая на тело конечных размеров, отличается от силы, действующей на материальную точку той же массы, сосредоточенной в центре масс тела.



2) Изменяя размеры и форму тела, можно менять величину действующей на него силы тяготения.

3) Этими изменениями размера и формы тела можно управлять таким образом, что возникающие вариации силы тяготения с течением времени приведут к существенному отличию траектории тела от первоначальной.

Первое из этих утверждений очевидно. Второе является следствием первого. Третье утверждение будет доказано ниже.

В общем случае движение тела (а не материальной точки) в ньютоновском поле сил не поддается описанию в конечном виде и осложнено взаимосвязью движения центра масс тела с движением около центра масс. Однако, как показано в книге [9.3], симметричное тело может двигаться в ньютоновском центральном поле сил так, что ось симметрии тела нормальна к плоскости орбиты. Такая ситуация изображена на рис. 9.1. При этом действующая на тело сила оказывается центральной, зависит только от расстояния  $r$  от центра масс тела до центра притяжения и определяется силовой функцией  $U(r)$ . Движение происходит по плоской орбите и полностью определяется первыми интегралами уравнений движения — интегралами площадей и энергии:

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = c, \quad (9.2.1)$$

$$\frac{V^2}{2} - \frac{U(r)}{m} = h. \quad (9.2.2)$$

Введем оскулирующий фокальный параметр  $p(t)$  и оскулирующий эксцентриситет  $e(t)$  орбиты. Радиус-вектор  $r$  и скорость  $V$  оскулирующей орбиты могут быть представлены тогда в виде

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}, \quad V = \sqrt{\frac{\mu}{p} (1 + e^2 + 2e \cos \nu)}. \quad (9.2.3)$$

Здесь  $\nu$  — истинная аномалия в возмущенном движении. В силу (9.2.1) оказывается, что в возмущенном движении фокальный параметр  $p$  постоянен, — это известное свойство движений в произвольном центральном поле сил.

Вычислим величину

$$\begin{aligned} \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} &= \frac{\mu}{2p} (1 + e^2 + 2e \cos \nu) - \frac{\mu}{p} (1 + e \cos \nu) = \\ &= \frac{\mu}{2p} (e^2 - 1). \end{aligned} \quad (9.2.4)$$

Теперь в силу (9.2.4) и постоянства  $p$  интегралы (9.2.1) и (9.2.2) запишутся так:

$$p = p_0 \quad (9.2.5)$$

$$e^2 + \frac{2p}{\mu} \left[ \frac{\mu}{r} - \frac{1}{m} U(r) \right] = \bar{h}, \quad (9.2.6)$$

где  $\bar{h}$  — новая постоянная. В нашем случае  $U(r)$  определяется формулой (9.1.1) и интеграл (9.2.6) после преобразований может быть записан в виде

$$e^2 + \frac{2p}{r} \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2 + \sqrt{1 + \alpha^2}} = \bar{h}, \quad \alpha = \frac{l}{r}. \quad (9.2.7)$$

Отсюда видно, что  $e$  является функцией от  $r$  и не постоянно. В процессе движения оскулирующий эксцентриситет  $e(t)$  и радиус-вектор  $r(t)$  изменяются так, что выполняется соотношение (9.2.7). Поэтому можно рассмотреть движение на плоскости  $e^2, r$  согласно (9.2.7). Однако реальное движение может происходить не во всей плоскости  $e^2, r$ , а только в некоторой ее части. В самом деле, из первого

равенства в формулах (9.2.3) имеем  $e^2 \cos^2 \nu = (p/r - 1)^2$ , следовательно,

$$e^2 \geq \left( \frac{p}{r} - 1 \right)^2 \equiv e_*^2(r). \quad (9.2.8)$$

Таким образом, на плоскости  $e^2, r$  движение может происходить только выше кривой  $e_*^2(r)$ , определяемой уравнением  $e_*^2 = (p/r - 1)^2$ .

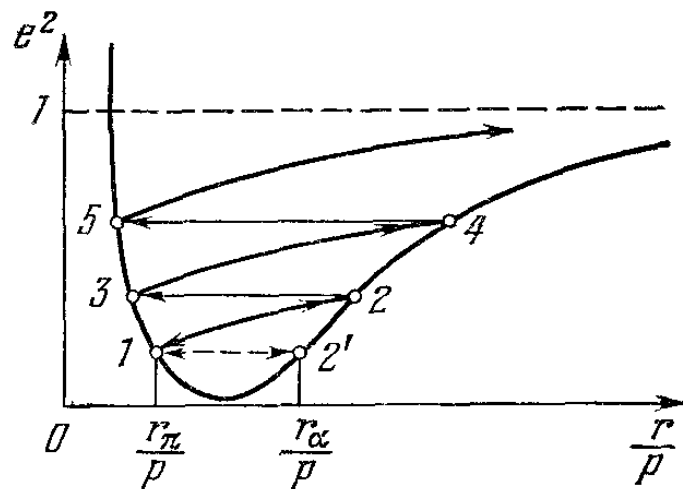


Рис. 9.2. Диаграмма движения пульсирующей гантели.

Очевидно,  $e_*^2(r) \rightarrow \infty$  при  $r \rightarrow 0$ ,  $e_*^2 = 0$  при  $p/r = 1$  и  $e_*^2 \rightarrow 1$  при  $r \rightarrow \infty$ . Кроме того,  $e_*^2 = 1$  при  $r/p = 1/2$  (рис. 9.2).

Построим в области (9.2.8) реального движения кривую (9.2.7) при фиксированных  $p$  и  $\bar{h}$  (рис. 9.2). При увеличении  $r$  от 0 до  $\infty$  эксцентриситет монотонно возрастает от  $e^2 = -\infty$  до  $e^2 = \bar{h}$ . Реальное движение определяется дугой кривой (9.2.7), лежащей в области, определяемой

неравенством (9.2.8). Пересечение кривой (9.2.7) с граничной кривой  $e_*^2 = e_*^2(r)$ , определяемой соотношением, следующим из (9.2.8), дает экстремальные точки траектории:  $r = r_{\min}$  (при этом  $e = e_{\min}$ ) и  $r = r_{\max}$  (при этом  $e = e_{\max}$ ). Движение тела периодически по  $e$  и  $r$ , так что в плоскости  $e^2, r$  оно происходит, например, по дуге 1—2 (рис. 9.2) от точки 1 ( $e = e_{\min}, r = r_{\min}$ ) к точке 2 ( $e = e_{\max}, r = r_{\max}$ ), затем обратно от точки 2 к точке 1 и т. д. Если бы вместо тела была материальная точка той же массы ( $l = 0$ ), то, как следует из (9.2.7), эта точка двигалась бы по невозмущенной кеплеровской эллиптической траектории  $e = \text{const}$  (например, туда и обратно по отрезку 2—3 на рис. 9.2).

Итак, при движении гантели, нормальной к плоскости своей орбиты, оказывается, что эксцентриситет периодически колеблется между наименьшим и наибольшим своими значениями. Когда гантель находится ближе всего к Земле, эксцентриситет минимален; в точке орбиты, наиболее удаленной от Земли, эксцентриситет максимален. Эти колебания эксцентриситета невелики, и в целом орбита гантели будет похожа на кеплеровский эллипс; спутник-гантель будет двигаться в ограниченной окрестности Земли, не удаляясь от нее.

Если уметь изменять эксцентриситет орбиты заметным образом, то первоначальную эллиптическую ( $e < 1$ ) орбиту можно превратить последовательными изменениями эксцентриситета в гиперболическую ( $e > 1$ ), и спутник улетит в дальний космос. Но у спутника — материальной точки эксцентриситет орбиты неизменен; а в только что разобранном случае спутника-гантели эксцентриситет хоть и меняется, но периодически и в небольших пределах. Систематического изменения эксцентриситета нет. При ограниченных размерах спутника большого изменения эксцентриситета как будто получить нельзя.

Однако потребуем следующее (и здесь, наконец, мы подошли к самому важному пункту обсуждения). Пусть рассматриваемая гантель может пульсировать: в нужные моменты сжиматься в точку или мгновенно выпрямляться на полную длину. Возможность мгновенных пульсаций, впрочем, не принципиальна и введена для упрощения рассуждений. Можно рассматривать и медленные изменения длины гантели.

Итак, пусть гантель начинает движение в ближайшей к Земле точке и пройдет полувиток орбиты до наиболее

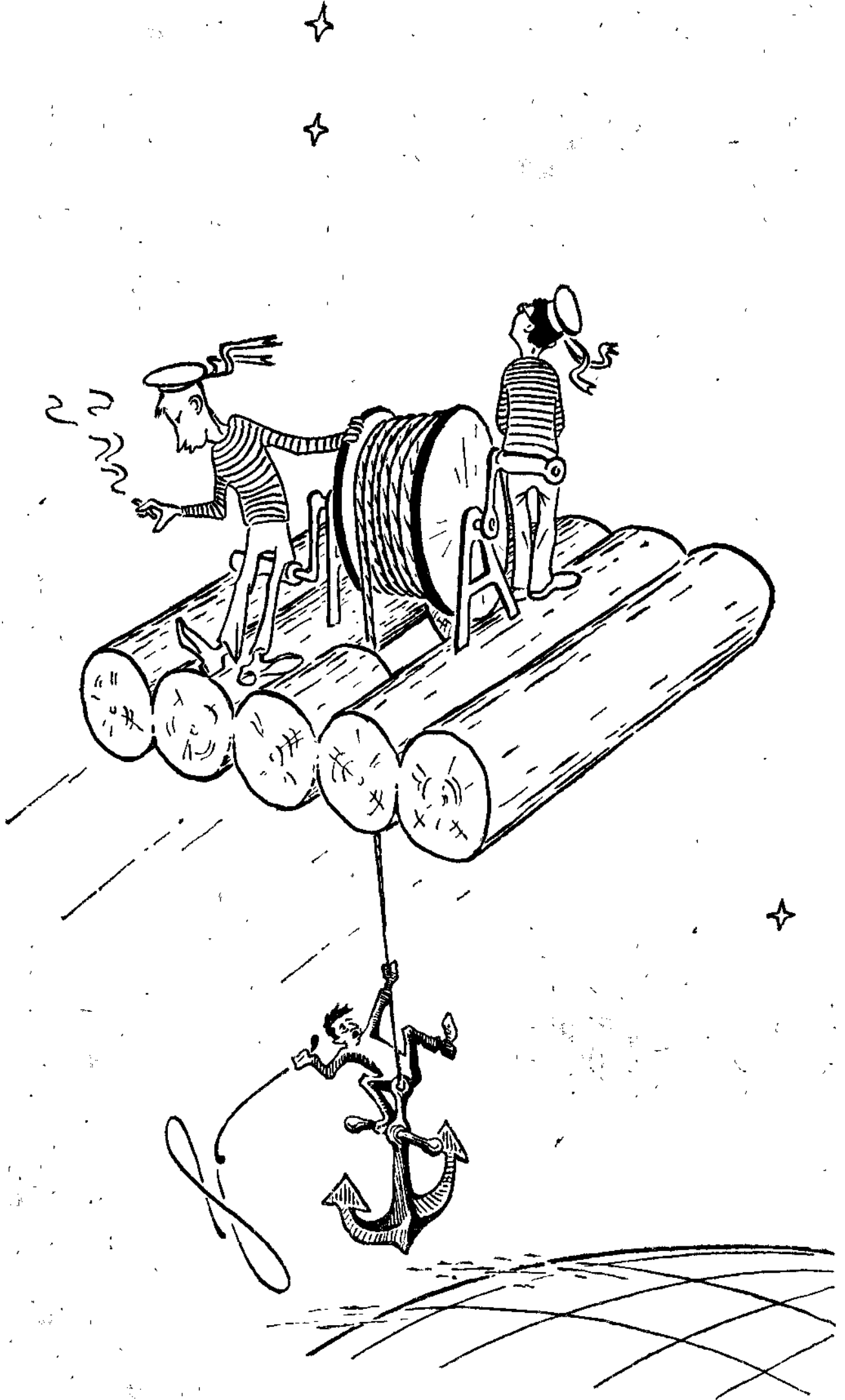


удаленной от Земли точки (вдоль отрезка 1—2 на рис. 9.2); в этой точке эксцентриситет, как уже говорилось, достигнет наибольшего значения ( $e = e_{\max}^{(1)}$ ,  $r = r_{\max}^{(1)}$ ). Тут мы сложим обе части гантели, мгновенно уменьшив ее длину «до нуля» (фактически это значит, что длина сложенной гантели пренебрежимо мала по сравнению с длиной открытой гантели). С этого момента спутник будет двигаться, как материальная точка, то есть по дуге кеплеровского эллипса (вдоль отрезка 2—3 на рис. 9.2), сохраняя только что полученное значение эксцентриситета  $e = e_{\max}^{(1)}$  постоянным.

Вернувшись в точку, ближайшую к Земле (это будет, конечно, точка, отличная от первой «ближайшей» точки), мы донесем в сохранности приобретенное значение эксцентриситета. Здесь мы мгновенно откроем гантель на полную длину! Теперь, на новом полувитке орбиты, за счет раскрытой гантели снова будет увеличиваться значение эксцентриситета (вдоль отрезка 3—4 на рис. 9.2). Когда во второй раз достигнем самой удаленной от Земли точки, эксцентриситет  $e_{\max}^{(2)}$  будет больше, чем при первом максимальном удалении ( $e_{\max}^{(2)} > e_{\max}^{(1)}$ ). Сложим гантель и понесем благоприобретенную величину эксцентриситета в сохранности до того момента, когда снова можно будет открыть гантель, и т. д. В конце концов, после многократных пульсаций гантели, можно добиться существенного изменения эксцентриситета орбиты и, может быть, даже достичь гиперболического значения эксцентриситета ( $e > 1$ ) и уйти из поля тяготения Земли.

В результате описанного процесса энергия, затраченная на «включение» и «выключение» гантели, перекачивается в энергию движения аппарата по орбите, что и позволяет разогнать аппарат вплоть до ухода из поля тяготения Земли. Орбита аппарата представляет при этом раскручивающуюся спираль с числом витков, равным числу пульсаций гантели. Космический аппарат, орбита которого меняется за счет вариаций действующей на аппарат гравитационной силы назовем *гравилётом*.

Внутренние силы, затраченные на «включение» и «выключение» гантели, дают заметный внешний эффект потому (и только потому), что существует и взаимодействует внешнее силовое поле. При этом необходима определенная резонансная настройка между внешними и внутренними силами. Не это ли имел в виду в своей знаменитой истории барон Мюнхгаузен?



### 3. Отстал от спутника — плыви брассом!

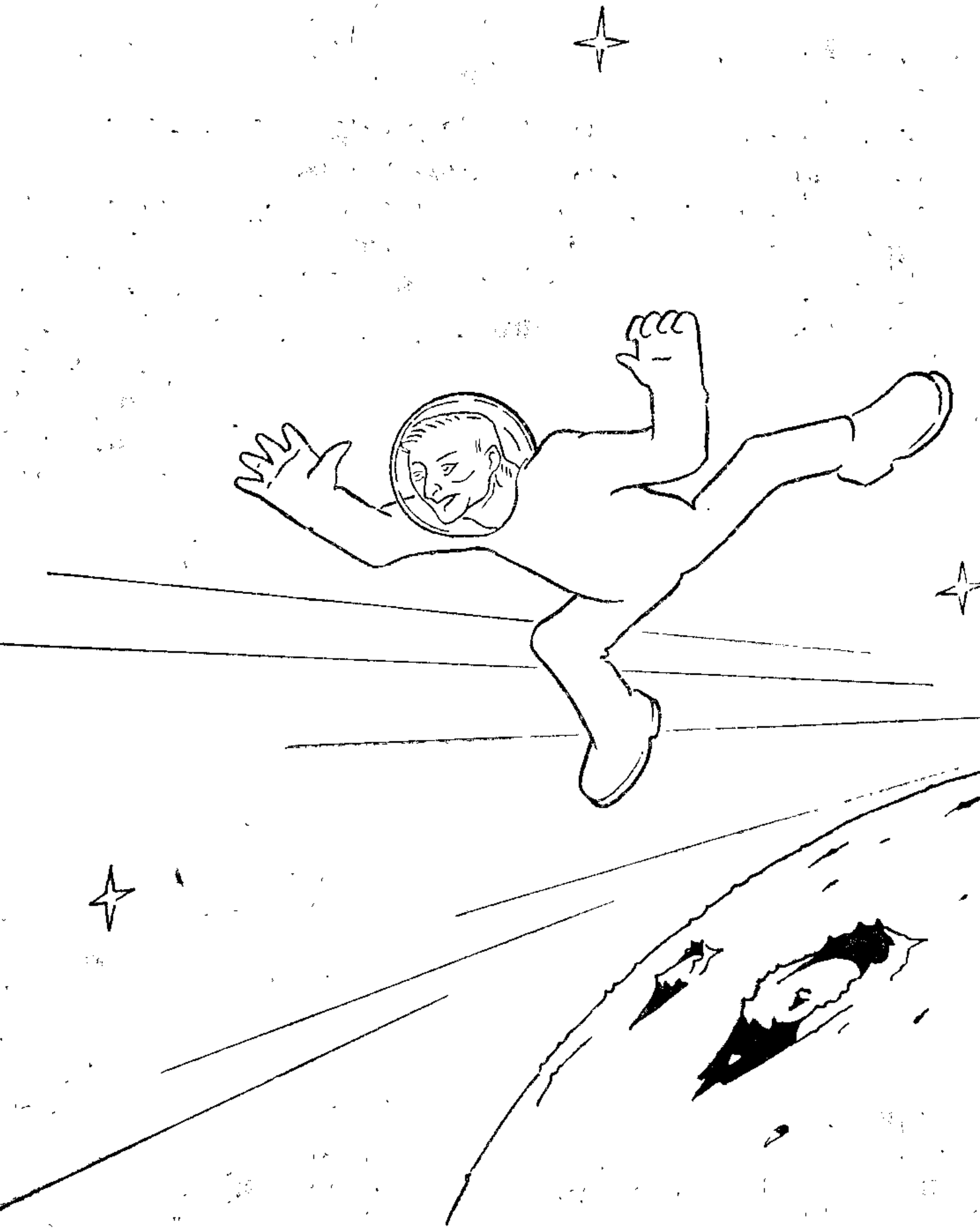
Не правда ли, захватывающая перспектива: вместо реактивного двигателя поставить электромотор, чтобы вовремя сматывал или разматывал трос, соединяющий шарики гантели, или даже... посадить для этой цели «матроса».

Реальные оценки несколько охлаждают загорающийся энтузиазм. За  $n$  циклов (включения и выключения гантели) эксцентриситет изменится примерно до значения  $e_n^2 \approx e_0^2 + n(l/p)^2(1 + e_0^2)$  (от своего начального значения  $e_0$ ). Так что для достижения  $e \sim 1$  необходимо  $n \sim (p/l)^2$  циклов (оборотов по орбите).

Если исходная орбита имеет  $p = 10\,000$  км, а  $l = 1$  км, то  $n \sim 10^8$  оборотов. Так как даже у поверхности Земли один оборот спутника совершается за полтора часа, а чем дальше от Земли, тем период обращения больше, то такому количеству оборотов соответствует время полета  $T > 1,5 \cdot 10^8$  час, что равно примерно 20 000 лет! Вряд ли наш «матрос» согласится на столь нудную работу. При этом отношение возмущающего ускорения к основному ускорению силы тяготения на исходной орбите имеет порядок  $f \sim (l/p)^2$ .

Однако если при той же орбите взять гантель с длиной  $l = 10$  км или даже  $l = 100$  км, то соответственно получим  $f \sim 10^{-6}$  или  $f \sim 10^{-4}$ . Эти числа дают порядок ускорений такой же, какой обеспечивается ионными и плазменными двигателями малой тяги. Но для этого космический аппарат должен иметь протяженность в десятки, а то и сотни километров! Для  $l = 100$  км число витков, потребных для разгона до параболической скорости, снижается до  $n \sim 10^4$ , а нижняя оценка времени разгона — до двух лет, что уже по крайней мере не выглядит юмористически; но надо помнить о сотнях километров сматываемого и разматываемого троса и связанных с этим проблемах. Если дать волю воображению и представить космический корабль длиной в 1000 км (в космосе места много), то такой корабль разогнался бы до параболической скорости всего за сотню витков, что заняло бы примерно неделю времени!

Отметим еще следующее обстоятельство. Эффективность космического корабля тем больше, чем больше масса центрального тела и чем ближе может находиться аппарат к центру этого тела. Масса Солнца велика, но велик и размер его; близко к центру Солнца не подлетишь.





К центру Земли можно подлететь близко; но масса Земли сравнительно мала. Однако в безграничных просторах космоса есть много звезд, словно предназначенных для маневрирования гравилётов в окрестности этих звезд. Это так называемые «белые карлики», размеры которых сравнимы с размерами планет, а массы — с массой Солнца. В окрестности «белых карликов» разгон гравилёта вплоть до выхода из сферы притяжения звезды может совершиться в десятки и сотни раз быстрее, чем разгон в окрестности Земли.

В нижеследующей таблице даны характеристики разгона 140-километрового космического корабля в окрестности Земли, Солнца и «белого карлика». Полудлина гравилёта принята равной  $l = 70$  км. Может быть, жители

ТАБЛИЦА 9.1

Небесное тело	Начальное расстояние корабля до центра небесного тела, км	$f \sim (l/p)^2$	Количество витков до разгона	Время разгона
Земля . . . . .	$7 \cdot 10^3$	$10^{-4}$	$10^4$	не менее двух лет
Солнце . . . . .	$7 \cdot 10^5$	$10^{-8}$	$10^8$	не менее 80 лет
Белый карлик (Сиринус-B)	$2 \cdot 10^4$	$10^{-5}$	$10^5$	несколько часов (не менее 1,5 часа)

планетных систем «белых карликов» пользуются для космических путешествий не ракетами, а гравилётами?

Не обязательно понимать под пульсациями изменения формы корабля. Может быть с теми же результатами, удастся заставить пульсировать внутри неизменного корабля массу жидкости [9.4].

Можно, наверное, вообще отказаться от пульсаций, если заставить корабль каким-либо способом в нужные моменты поворачиваться нужным образом (с помощью маховиков, например). Ведь сила притяжения зависит и от того, как расположен корабль по отношению к Земле. Тогда энергия, затраченная на поворот гравилёта, перейдет в энергию, изменяющую орбиту корабля; сам корабль сохраняет свою форму неизменной, что, конечно, удобнее пульсирующего гравилёта. Но принцип остается тот же —

изменение орбиты гравилёта за счет вариации силы тяготения, действующей на него.

Наша цель, однако, не инженерная разработка аппарата, а доказательство принципиальной возможности эволюции орбиты пульсирующего тела. Принципиально говоря, космонавт, отставший от спутника и потерявший индивидуальный двигатель (любимая фантастами ситуация), может догнать этот спутник, меняя свою орбиту целенаправленными пульсациями. Пусть плывет брасом! Тем самым приобретает шанс спастись. Но не спрашивайте меня, сколько на это уйдет времени.

#### 4. Гравилёт и читатели

Опубликование статей [9.1, 9.2] о гравилёте вызвало довольно оживленную реакцию читателей. Инженер И. Троицкий из г. Тулы пишет в редакцию журнала «Техника — молодежи» о статье В. Белецкого и М. Гиверца, опубликованной в журнале «Космические исследования»: «Сообщение произвело на меня опеломляющее впечатление. Со школьных лет мы привыкли к мысли, что перераспределение масс в «замкнутой системе» (например, спутнике) не влияет на траекторию ее движения. Оказывается, что далеко не так... Возникает вполне реальная возможность — за счет вариации формы корабля, перекачки жидкости внутри него, определенных маневров изменить направление полета и отправиться в далекое путешествие. «Космические исследования» сугубо научный журнал с ограниченным тиражом... Было бы не плохо, если бы редакция попросила кого-либо из авторов написать популярную статью, рассчитанную на массового читателя».

Откликаясь на эту просьбу, редакция журнала «Техника — молодежи» опубликовала статью [9.2]. Немедленно было получено послание от одного сердитого московского инженера:

«Уважаемые товарищи! В журнале № 3 за текущий год опубликована статья профессора В. Белецкого «Гравилёт»... Рассуждения, приводимые в статье, основаны на простом невежестве и свидетельствуют о порочной практике присвоения ученых званий лицам, не представляющим самых элементарных вещей... Давно пора разоблачить некоторых докторов, не желающих признавать очевидные, установленные наблюдениями закономерности; в том числе и автора „Гравилёта“».

Вот так письмо!

Не смог «умолчать о совершенно неверных толкованиях В. Белецкого» и читатель из Джекказгана: «Внутренние силы космического аппарата никак не могут повлиять на величину ньютоновской силы притяжения этого аппарата к Небесному Телу. Поэтому «гантель» профессора Белецкого до и после ее раздвижения должна занимать такое положение относительно Небесного Тела, при котором ее масса всегда будет находиться на неизменном расстоянии от центра Небесного Тела, ибо этой ньютоновской силой масса космического аппарата как будто бы привязана к Небесному Телу. Поэтому хитромудрые измышления профессора и доктора физико-

математических наук В. Белецкого явились результатом полного непонимания им физических законов небесной механики, в которых, по-видимому, он „плавает брассом“.

Автор с уважением относится к мнению читателей и понимает, что «природе наши звания — ничто; перед ней человек, как голенький» \*). Но как воодушевленные, так и негодующие читатели явились жертвами двух недоразумений:

Первое недоразумение основано на тезисе: «внутренние силы не способны изменить движение центра масс системы». Это, конечно, верно, но лишь при отсутствии каких бы то ни было внешних сил. В реальных условиях, однако, всегда найдутся внешние к данной системе силы. И во многих случаях движение определяется именно взаимодействием внутренних и внешних сил. Пример: паровоз (трение колес о рельсы!). Другой пример: гравилёт.

Второе недоразумение происходит от нечеткого понимания того, что ньютоновская гравитация действует на протяженные тела и что поэтому их движение, строго говоря, не кеплерово.

Приведем яркий пример «гравилётного» эффекта [9.3].

Уравнения движения гантели в ньютоновском центральном поле сил имеют следующее строгое частное решение: центр масс гантели движется по плоской круговой орбите произвольного постоянного радиуса  $R_0$ , причем центр притяжения совпадает с центром орбиты; сама гантель при этом все время расположена вдоль текущего радиуса-вектора орбиты. Скорость  $V$  центра масс

гантели определяется формулой  $V^2 = \frac{1 + \alpha^2}{(1 - \alpha^2)^2} \cdot \frac{\mu}{R_0}$ , где  $\alpha = l/R_0$ ,

а  $l$  — полудлина гантели. Эта круговая орбита не кеплерова (для кеплеровой орбиты круговая скорость определяется формулой

$V^2 = \mu/R_0$ ). При  $\alpha \geq 0,47$  окажется  $V^2 \geq 2 \frac{\mu}{R_0}$ , т. е.  $V$  будет больше

параболической скорости. Поэтому если гантель с таким значением  $\alpha$  «схлопнуть» в материальную точку, то она сорвется с круговой орбиты и улетит в бесконечность. Для этого, однако, гантель должна иметь размеры порядка размеров орбиты! Для аппарата же умеренных размеров можно, как мы видели, использовать этот же принцип, заменяя однократное «схлопывание» гантели разумно организованным многократным ее включением и выключением.

Важно подчеркнуть, что доказательство возможности осуществления гравилётного маневрирования получено не словесными рассуждениями, а путем точного решения строгих уравнений движения.

---

\*) Афоризм принадлежит известному сибирскому геологу, члену-корреспонденту АН СССР В. П. Солоненко (газета «Восточно-Сибирская правда» от 18 декабря 1966 г.).

# МЕЖПЛАНЕТНЫЕ ПОЛЕТЫ — МАЛЫЕ ТЯГИ ДЛЯ БОЛЬШИХ ЦЕЛЕЙ

Мы были узники на шаре скромном,  
И сколько раз, в бессчетной смене лет,  
Упорный взор Земли в просторе темном  
Следил с тоской движения планет!

В. Брюсо  
«Сын Земли»

Мы должны нести другим планетам  
Благовестье маленькой Земли!

В. Брюсов  
«Детские упования»

## 1. Вступление

Достижения человечества в покорении космоса велики. За двенадцать лет, с 1957 по 1969 год, пройдена дистанция от запуска первого искусственного спутника до высадки первой экспедиции на Луну. Однако заветнейшая цель — экспедиции на другие планеты — еще впереди. Осуществление таких экспедиций — трудная задача, которая может быть разрешена различными путями. Может быть, сборка межпланетного корабля и заправка его химическим горючим будет осуществлена на орбите около Земли. А может быть, корабль стартует с такой орбиты не с помощью реактивных двигателей на химическом горючем, а с помощью двигателей малой тяги. Это, например, разрабатываемые конструкторами ионные и плазменные двигатели, о которых уже говорилось в седьмом очерке. Максимальное ускорение, которое такие двигатели смогут сообщить межпланетному кораблю, составляет всего лишь несколько  $мм/сек^2$ . Однако, действуя постоянно, в течение всего полета (несколько месяцев!) даже такая малая тяга создает большие возможности для маневрирования корабля в космосе. Можно представить, как корабль, раскручиваясь по спиральной траектории вокруг Земли, достигает параболической скорости и уходит в космос, курсом

на Марс. В окрестности Марса двигатели малой тяги постепенно затормозят корабль до параболической (относительно Марса) скорости; затем корабль по спиральной траектории выйдет на окончательную орбиту относительно Марса и останется на ней, пока «космический бот» с экспедицией опустится на поверхность планеты и вернется назад.

Спиральные траектории с малой тягой в окрестности планет уже рассматривались в одном из предыдущих очерков этой книги. Здесь же рассмотрим траектории полета с малой тягой между планетами. Этот участок начинается после достижения параболической скорости относительно одной планеты и кончается выходом на параболическую скорость относительно другой планеты. Поэтому притяжение планет на этом участке совершенно несущественно, и им можно пренебречь.

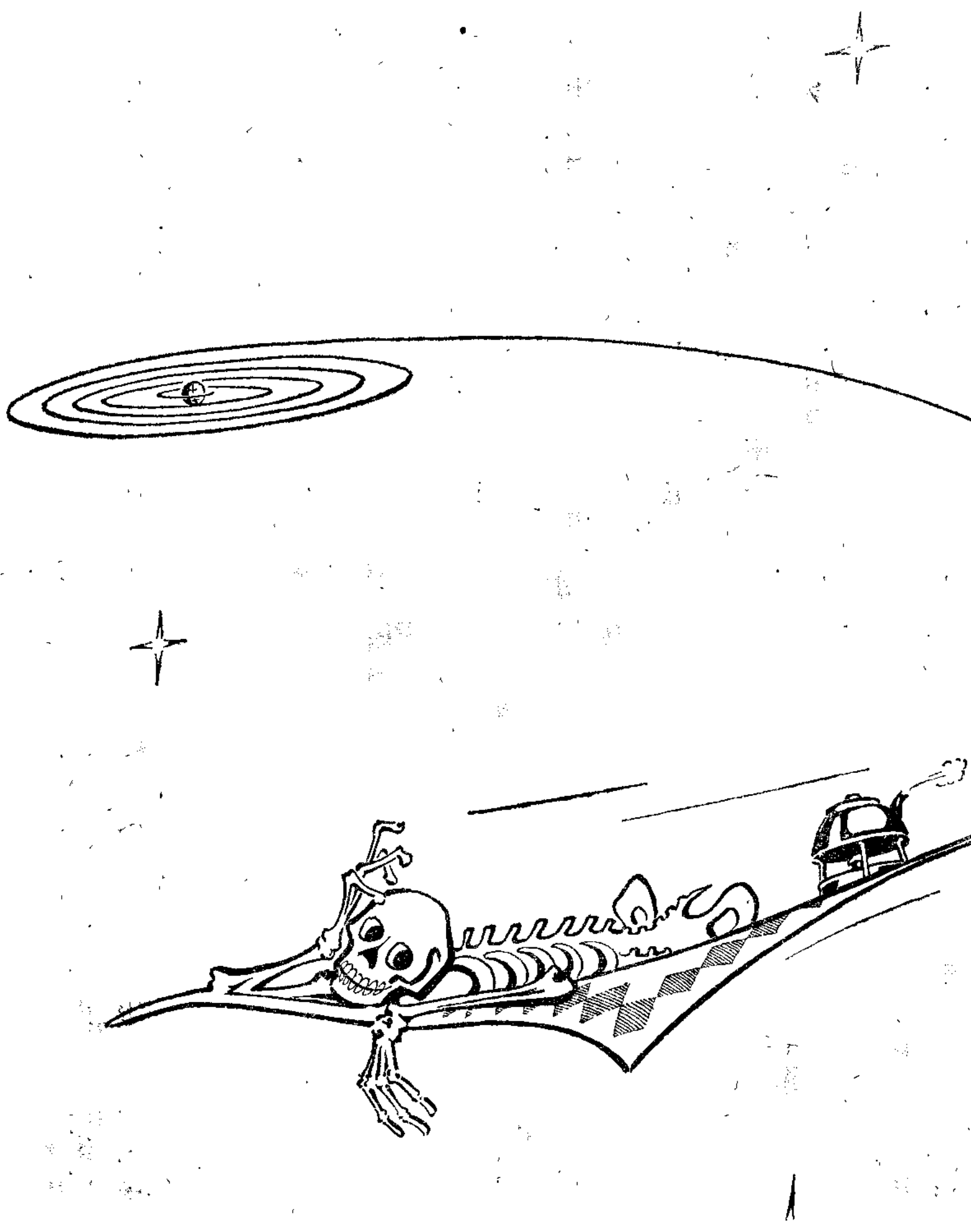
Движение корабля определяется притяжением Солнца и тягой реактивных двигателей. В такой постановке и будем рассматривать задачу. Дальнейшее изложение будет следовать, в основном, работам [10.1—10.3] автора и его коллег — В. В. Голубкова, В. А. Егорова, В. Г. Ершова. Читатель, заинтересовавшийся динамикой полетов с двигателями малой тяги, может получить большой объем информации из монографии [10.4] Г. Л. Гродзовского, Ю. Н. Иванова, В. В. Токарева.

## 2. Побольше полезного груза, поменьше топлива

Таково обычное требование к космическому (и не только космическому) полету (и даже не обязательно к полету). Иначе говоря, мы так должны управлять полетом, чтобы выполнить его задачу с наименьшим возможным расходом массы. Управлять полетом — это значит отыскать нужный закон изменения со временем реактивного ускорения  $f(t)$ . Известно (по определению реактивной силы), что

$$f = -\frac{V_r}{m} \frac{dm}{dt}, \quad (10.2.1)$$

где  $V_r$  — относительная (относительно аппарата) скорость истечения продуктов сгорания (скорость движения частиц в реактивной струе),  $m(t)$  — переменная масса ракеты,  $\frac{dm}{dt}$  — секундный расход масс. Для широкого класса



ракет (с химическим топливом, например) можно положить  $V_r = \text{const}$ ; тогда из (10.2.1) следует

$$\frac{m_K}{m_0} = e^{-\frac{1}{V_r} \int_0^T f dt}, \quad (10.2.2)$$

где  $T$  — время полета. Отношение конечной массы  $m_K$  (полезного груза) к начальной массе  $m_0$  тем больше, чем меньше величина интеграла

$$S = \int_0^T f dt. \quad (10.2.3)$$

Управлением  $f(t)$  надо распорядиться так, чтобы осуществить заданный полет с наименьшим значением интеграла (10.2.3).

Однако для многих двигателей малой тяги величина  $V_r$  не является постоянной. Зато постоянна мощность  $N$  в струе, то есть та часть мощности бортовой двигательной установки, которая переходит в кинетическую энергию реактивной струи. Имеем по определению

$$N = -\frac{dm}{dt} \frac{V_r^2}{2}. \quad (10.2.4)$$

Тогда из (10.2.4) и (10.2.1) следует  $-\frac{1}{m^2} \frac{dm}{dt} = -\frac{f^2}{2N}$ , откуда

$$\frac{m_K}{m_0} = \frac{1}{1 + \frac{m_0}{2N} \int_0^T f^2 dt}. \quad (10.2.5)$$

Отношение масс тем больше, чем меньше величина интеграла

$$I = \int_0^T f^2 dt. \quad (10.2.6)$$

Таким образом, осуществляя заданный полет с помощью двигателей малой тяги, надо так распорядиться реактивным ускорением  $f(t)$ , чтобы минимизировать значение интеграла  $I$  (10.2.6).

Задачи такого класса называются *задачами оптимального управления*.

В этом очерке в основном речь будет идти об оптимальных полетах, минимизирующих функционал  $I$  (10.2.6). Однако в конце очерка будет рассмотрена одна важная задача на минимизацию функционала  $S$  (10.2.3).

### 3. Принцип максимума Понтрягина

Задача оптимального управления применительно к интересующему нас случаю может быть поставлена так. Пусть уравнения движения записаны в векторном виде:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (10.3.1)$$

где  $\mathbf{x}$  — вектор с компонентами  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ;  $\mathbf{f}$  — вектор с компонентами  $f_1, \dots, f_n$ , а  $\mathbf{u}$  — вектор с компонентами  $u_1, u_2, \dots, u_r$ . Вектор  $\mathbf{u}$  является вектором управления; в каждый момент времени уравнения  $u_1, \dots, u_r$  могут принимать значения, только принадлежащие некоторому замкнутому множеству  $U$ . Таким образом,  $\mathbf{u} \in U$ .

В практических задачах почти всегда имеются какие-то ограничения на управления: реактивная тяга не может превзойти своей максимальной величины, рули не могут повернуться больше чем на некоторый максимальный угол и т. п. Этим и объясняется задание управлений  $\mathbf{u}$  на замкнутом множестве, что как раз означает *ограниченность управлений*: точка  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_r)$  может находиться внутри  $U$  или на его границе. Однако в частном случае можно рассматривать и ничем не ограниченные значения  $\mathbf{u}$ . *Допустимыми управлениями* будем называть любые кусочно-непрерывные функции  $u_s(t)$  ( $s = 1, \dots, r$ ), принадлежащие множеству  $U$ .

Пусть какое-то качество процесса управляемого движения (10.3.1) характеризуется функционалом

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt, \quad (10.3.2)$$

где  $t_0$  и  $t_1$  — начальный и конечный моменты движения, а  $f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \geq 0$  (что, впрочем, не принципиально важно). Задача оптимизации движения (10.3.1) ставится тогда так: среди всех допустимых управлений  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ , под воздействием которых фазовая точка  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$  перево-



дится уравнениями движения (10.3.1) в фазовую точку  $x_1 = x(t_1)$ , выбрать такие управления, которые минимизируют значение функционала (10.3.2).

Наиболее широко применяемым методом решения задач оптимального управления является принцип максимума Понтрягина. Строгие постановки и доказательства можно найти в монографиях [10.5, 10.6]. Здесь же нас интересует формальный аппарат решения задач оптимального управления.

Введем в рассмотрение вспомогательный вектор

$$\psi = (\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n), \quad (10.3.3)$$

где  $\psi_0$  — постоянная величина,  $\psi_0 \leq 0$ , а  $\psi_1, \dots, \psi_n$  — некоторые функции времени:  $\psi_i = \psi_i(t)$ .

Построим из правых частей уравнений (10.3.1), функции  $f_0$  и вектора  $\psi$  (10.3.3) функцию

$$\mathcal{H} = \sum_{i=0}^n \psi_i f_i(x, u). \quad (10.3.4)$$

Заметим, что уравнения (10.3.1) тогда могут быть записаны так:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_i} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (10.3.5)$$

Определим теперь функции  $\psi(t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) дифференциальными уравнениями

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (10.3.6)$$

Оказывается [10.5, 10.6], что для оптимальности (в смысле минимума функционала (10.3.2)) процесса  $x(t)$ ,  $u(t)$ , переводящего фазовую точку  $x_0$  в фазовую точку  $x_1$ , необходимо существование такого нетривиального решения системы (10.3.6) и такой константы  $\psi_0 \leq 0$ , что для любого момента  $\tau$ , где  $t_0 \leq \tau \leq t_1$ , выполнено условие максимума

$$\mathcal{H}(\psi(\tau), x(\tau), u(\tau)) = \max_{v \in U} \mathcal{H}(\psi(\tau), x(\tau), v). \quad (10.3.7)$$

Итак, оптимальное управление  $u$  находится из условия (10.3.7) — практически через  $\psi$  и  $x$ ; это дает возможность затем, интегрируя совместно уравнениям (10.3.6) и (10.3.5) (или, что то же, (10.3.1)), построить оптимальную траекторию. Обычно наиболее сложная часть задачи —

нахождение начальных данных для интегрирования системы (10.3.6).

Заметим, что система (10.3.5) — (10.3.6) имеет порядок  $2n$ ; ее решение, стало быть, зависит от  $2n$  произвольных постоянных, что дает возможность в действительности удовлетворить  $2n$  краевым условиям

$$\mathbf{x}_i(t_0) = \mathbf{x}_{i0}, \quad \mathbf{x}_i(t_1) = \mathbf{x}_{i1} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Принцип максимума Понтрягина дает лишь необходимые условия оптимальности. Он необходимо выполняется в оптимальных процессах. Но если принцип максимума в каком-то процессе выполнен, то, может статься, этот процесс и не оптимален. Поэтому задачи, решенные с помощью принципа максимума, требуют, вообще говоря, проверки на достаточность полученных условий оптимальности. Часто (например, в линейных задачах) принцип максимума дает одновременно и достаточные условия оптимальности. Но следует помнить, что не для всякой задачи это так.

#### 4. Уравнение оптимального полета

Рассмотрим движение ракеты массы  $m$  в поле сил с потенциалом  $\bar{U}$ . Обозначим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\bar{U}}{m} = U(x, y, z), \quad \text{grad } U = \left( \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right), \\ \mathbf{r} = (x, y, z), \quad \mathbf{V} = (u, v, w), \quad \mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z). \end{aligned} \right\} (10.4.1)$$

Здесь  $x, y, z$  — координаты ракеты,  $u, v, w$  — компоненты ее скорости,  $f_x, f_y, f_z$  — компоненты реактивного ускорения. Уравнения движения в векторной форме запишутся тогда так:

$$\dot{\mathbf{V}} - \text{grad } U = \mathbf{f}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{V}. \quad (10.4.2)$$

Предположим, что двигатель ракеты обладает постоянной мощностью реактивной струи. Тогда нужно искать траектории, обеспечивающие минимум функционала (10.2.6). Наложим еще ограничения на реактивное ускорение:

$$-a \leq f_x \leq a, \quad -a \leq f_y \leq a, \quad -a \leq f_z \leq a. \quad (10.4.3)$$



Здесь точки проставлены вместо аналогичных уравнений для других переменных  $\psi$ . В векторном виде уравнения (10.4.5) можно представить так:

$$\dot{\psi}_r + A\psi_v = 0, \quad \dot{\psi}_v = -\psi_r, \quad (10.4.6)$$

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \end{vmatrix},$$

$\psi_r$  — вектор с компонентами  $\psi_x, \psi_y, \psi_z$ ;  $\psi_v$  — вектор с компонентами  $\psi_u, \psi_v, \psi_w$ . Уравнения (10.4.2), (10.4.4'),

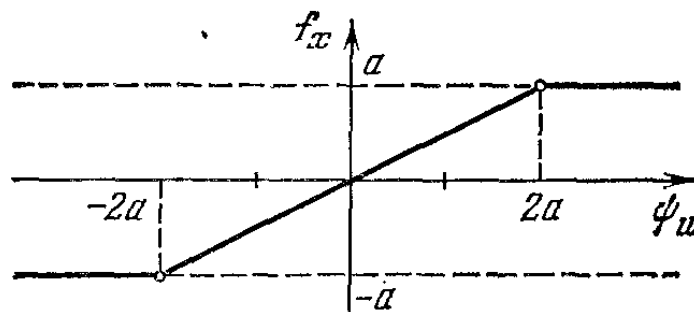


Рис. 10.2. Оптимальное управление.

(10.4.6) представляют собой замкнутую систему уравнений оптимального (в смысле минимума интеграла (10.2.6)) полета ракеты с учетом ограничений (10.4.3) на управления.

Большое достоинство принципа максимума Понтрягина состоит в том, что он при расчете оптимальных движений позволяет просто и единообразным образом учитывать различные ограничения, наложенные на управления. Это очень важно для современных задач механики. На примере уравнений (10.4.2), (10.4.4'), (10.4.6) мы продемонстрировали действенность формализма принципа максимума. В дальнейшем, однако, для простоты изложения будет рассматриваться случай, когда на управления  $f_x, f_y, f_z$  не наложено ограничений ( $a = \infty$ ). Это эквивалентно также рассмотрению лишь таких траекторий полета, оптимальное управление вдоль которых не требует достижения предельного значения  $a \neq \infty$  компонент реактивного ускорения.

## 5. Откажемся от ограничений!

Тогда, как легко понять из (10.4.4), оптимальное управление дается векторной формулой  $\mathbf{f} = \psi_V / 2$  и вместо уравнений (10.4.6) можно написать прямо дифференциальные уравнения оптимального управления! Вместе с (10.4.2) они дадут замкнутую систему уравнений оптимального полета. Эту систему можно записать так:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} - \text{grad } U &= \mathbf{f}, \\ \ddot{\mathbf{f}} - A\mathbf{f} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.5.1)$$

Здесь матрица  $A$  та же самая, что и в (10.4.6).

Мы условились ранее не учитывать притяжения планет на участке полета между ними. Тогда приближенно краевые условия для задачи (10.5.1) совпадают с условием отлета с планеты (непритягивающей!) с какой-то начальной относительно планеты скоростью и прилета на другую планету с какой-то скоростью относительно этой планеты. Относительные скорости старта и финиша можно считать нулевыми (так как они малы по сравнению с переносной скоростью движения самих планет). Итак, в качестве краевых условий будем брать впредь координаты и компоненты скорости планеты старта (пусть — Земли) и планеты назначения (допустим, Марса).

Двенадцать постоянных интегрирования системы (10.5.1) следует определить так, чтобы удовлетворились 12 краевых условий:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}^0, & \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\mathbf{r}}^0 & \text{при} & t = t_0, \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}^K, & \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\mathbf{r}}^K & \text{при} & t = t_1. \end{aligned} \right\} \quad (10.5.2)$$

Естественно, система (10.5.1) допускает первый интеграл

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0, \quad (10.5.3)$$

где  $\mathcal{H}$  дается выражением (10.4.4), в которое надо подставить вместо  $\psi_u, \psi_v, \psi_w$  соответственно  $2\dot{f}_x, 2\dot{f}_y, 2\dot{f}_z$ , а вместо  $\psi_x, \psi_y, \psi_z$  соответственно  $-2\dot{f}_x, -2\dot{f}_y, -2\dot{f}_z$ . Если же на силовую функцию  $U$  наложить добавочное условие, что она представляет собой силовую функцию поля центральных сил (для нашей задачи это так и есть), то уравнения (10.5.1) будут допускать еще три первых интеграла, эквивалентных одному векторному интегралу:

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{f}} + \mathbf{f} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{k}. \quad (10.5.4)$$

Однако интегралов (10.5.3), (10.5.4) недостаточно для полного интегрирования системы (10.5.1), и она, по-видимому, неинтегрируема \*). Поэтому необходимо искать приближенные методы решения краевой задачи (10.5.1) — (10.5.2).

## 6. Метод транспортирующей траектории

Можно решать краевую задачу (10.5.1) — (10.5.2) численными методами, с помощью ЭВМ. Для этого нужно знать какое-то приближенное решение задачи и использовать его в качестве первого приближения в итерационном процессе решения краевой задачи. Итерационный метод (метод последовательных приближений) почти всегда неизбежен в нелинейных краевых задачах. На итерации уходит много машинного времени, что затрудняет получение обзорных результатов.

Численные методы всегда остаются в нашем распоряжении. Однако попытаемся обойтись без них если не для любых краевых задач (10.5.1) — (10.5.2), то хотя бы для достаточно широкого их подкласса. Если удастся получить приближенное аналитическое решение задачи, то его, между прочим, можно использовать в качестве первого приближения для численного итерационного решения точной краевой задачи.

Т. М. Энеев предложил использовать в динамике полета с малой тягой метод, названный им «методом транспортирующих траекторий».

Пусть мы хотим совершить межпланетный полет, отбыв в момент  $t_0$  с планеты старта и прибыв в момент  $t_1$  на планету назначения. Найдем сначала обычную кеплеровскую траекторию, решающую эту задачу. Это можно сделать, так как уравнения кеплеровского движения, как известно, интегрируемы. Если для этого случая краевая задача решена, то тем самым определяется некоторая эллиптическая траектория, проходящая через точки старта и финиша соответственно в моменты  $t_0$  и  $t_1$ . Интересующая нас

---

\*) Все попытки автора пробить эту стену привели лишь к нахождению частного случая оптимального управления, удовлетворяющего системе (10.5.1):  $\mathbf{f} = \frac{2\beta}{2 + \beta t} \mathbf{V}$ , где  $\beta$  — произвольная постоянная. С помощью этого управления, конечно, можно решить не любую задачу оптимального полета, а только такую, которая зависит всего от семи краевых условий.

траектория полета с малой тягой должна не очень сильно отличаться от только что найденной кеплеровской траектории. Ведь если время полета не очень велико, малое реактивное ускорение просто «не успеет» сильно отклонить траекторию полета от соответствующим образом подобранной кеплеровской траектории. Кеплеровская траектория как бы ведет за собой траекторию с малой тягой. Назовем такую кеплеровскую траекторию *транспортирующей траекторией*. Систему координат, которая движется поступательно по транспортирующей траектории, назовем *транспортирующей системой координат*.

Идея состоит в том, чтобы рассматривать движение ракеты с малой тягой в транспортирующей системе координат. Траектория такого относительного движения, как нетрудно сообразить, не уходит далеко от начала координат, что дает возможность линеаризировать и решить до конца краевую задачу. Это показано в работе [10.1] В. В. Белецкого и В. А. Егорова. Следуя этой работе, предположим, что траектория движения есть

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\rho}, \quad (10.6.1)$$

где  $\mathbf{r}_0$  — известная транспортирующая траектория, и величина  $|\boldsymbol{\rho}|$  мала по сравнению с  $|\mathbf{r}_0|$ . Вектор-функция  $\mathbf{r}_0(t)$  удовлетворяет уравнению невозмущенного движения

$$\ddot{\mathbf{r}}_0 - \text{grad } U_0 = 0, \quad (10.6.2)$$

где  $U_0$  — значение силовой функции  $U$  вдоль транспортирующей траектории  $\mathbf{r}_0(t)$ . Подставим (10.6.1) в (10.5.1), разложим  $U(x, y, z)$  в ряд и пренебрежем малыми величинами второго и более высоких порядков малости. При этом учтем, что по условию малы не только величины  $\boldsymbol{\rho}$ ,  $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ , но и  $\dot{\mathbf{f}}$ ; это значит, что членами вида  $\boldsymbol{\rho}\dot{\mathbf{f}}$  и т. п. тоже пренебрегаем. Учтем (10.6.2). Тогда вместо системы (10.5.1) получим линеаризованную систему

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} - A_0\boldsymbol{\rho} = \mathbf{f}, \quad (10.6.3)$$

$$\ddot{\mathbf{f}} - A_0\mathbf{f} = 0. \quad (10.6.4)$$

Здесь  $A_0$  — значение матрицы  $A$  вдоль транспортирующей траектории  $\mathbf{r}_0(t)$ ; матрица  $A_0(t)$  содержит известные периодические функции времени.

Линейная система любого порядка интегрируема, если коэффициенты ее однородной части постоянны; в нашем

случае этого заведомо нет. Линейные системы с переменными коэффициентами, вообще говоря, неинтегрируемы. Но наша система (10.6.3) — (10.6.4) обязана интегрироваться! (В этом и состоял «тайный» замысел при введении транспортирующей системы координат.) Действительно, допустим на секунду, что в системе (10.6.3) — (10.6.4)

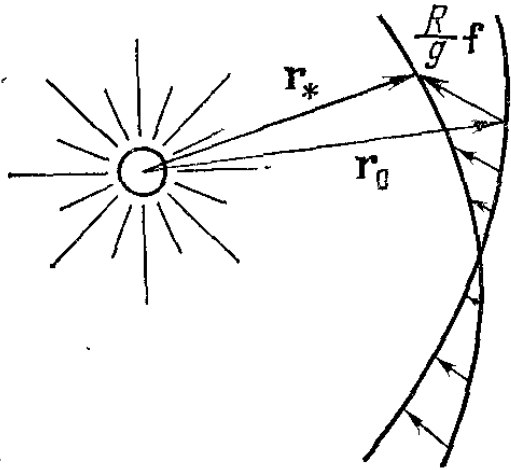


Рис. 10.3. Оптимальное управление в линейном приближении.

$f \equiv 0$ . Тогда оставшаяся (левая) часть векторного уравнения (10.6.3) по идее имеет решением вариацию кеплеровского движения! Кеплеровское движение описывается в квадратурах, значит, и его вариация — тоже. Далее, векторное уравнение (10.6.4) имеет в точности такой же вид, как и уравнение (10.6.3) с нулевой правой частью. Значит, интегрируемо и (10.6.4)! Определяя его решение  $f(t)$  и подставляя в правую часть урав-

нения (10.6.3), приходим к неоднородному векторному уравнению, в котором правая часть есть известная функция времени, а соответствующее ему однородное уравнение интегрируемо. Решение уравнения такой структуры, как известно, находится в квадратурах (например, методом вариации постоянных). Итак, система (10.6.3) — (10.6.4) интегрируется в квадратурах.

Из этих соображений (и соображений размерности), между прочим, следует, что в рассматриваемом приближении оптимальное управление вектором реактивного ускорения дается формулой

$$\mathbf{f} = \alpha \frac{g}{R} (\mathbf{r}_* - \mathbf{r}_0), \quad (10.6.5)$$

где  $\mathbf{r}_0(t)$  определяет транспортирующую кеплеровскую эллиптическую орбиту,  $\mathbf{r}_*(t)$  — кеплеровскую эллиптическую орбиту, параметры которой определяются крайними условиями задачи,  $g$  — ускорение ньютоновского притяжения на расстоянии  $R$  от центра притяжения,  $\alpha \sim 1$  — безразмерная скалярная постоянная. На рисунке 10.3 приведена схема управления, отвечающая 10.6.5).

Фактическое интегрирование системы (10.6.3) — (10.6.4) проведем несколько позже.



## 7. Схема решения краевой задачи

Линейные уравнения (10.6.3) — (10.6.4) хороши не только своей интегрируемостью, но и тем, что позволяют решить краевую задачу, так сказать, одним ударом, без последовательных приближений. Для нелинейных задач это, вообще говоря, невозможно.

Краевые условия (10.5.2) ввиду (10.6.1) запишутся теперь так:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \rho_0, & \dot{\rho} &= \dot{\rho}_0 & \text{при} & t = t_0, \\ \rho &= \rho_K, & \dot{\rho} &= \dot{\rho}_K & \text{при} & t = t_1. \end{aligned} \right\} \quad (10.7.1)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 &= \mathbf{r}^0 - \mathbf{r}_0(t_0), & \dot{\rho}_0 &= \dot{\mathbf{r}}^0 - \dot{\mathbf{r}}_0(t_0), \\ \rho_K &= \mathbf{r}^K - \mathbf{r}_0(t_1), & \dot{\rho}_K &= \dot{\mathbf{r}}^K - \dot{\mathbf{r}}_0(t_1). \end{aligned} \right\} \quad (10.7.2)$$

Так как транспортирующая траектория  $\mathbf{r}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  известна в любой момент времени, то краевые условия относительного движения (10.7.1) легко вычисляются через краевые условия (10.5.2) абсолютного движения по формулам (10.7.2).

Схема интегрирования системы (10.6.3) — (10.6.4) и решения краевой задачи (10.7.1) может быть описана следующим образом. Обозначим теперь через  $\rho$  шестимерный вектор, включающий как координаты, так и компоненты скоростей. Решение уравнения (10.6.3) тогда можно искать в виде

$$\rho = \rho_* + \rho_{**}, \quad (10.7.3)$$

где  $\rho_*$  — решение однородной системы (10.6.3), а  $\rho_{**}$  — частное решение неоднородной системы (10.6.3).

Пусть  $\rho_i$  — частные линейно независимые решения однородной системы (10.6.3). Они должны быть известны, так как известна вариация кеплеровского движения. Тогда

$$\rho_* = \sum_{i=1}^6 c_i \rho_i, \quad (10.7.4)$$

где  $c_i$  — постоянные интегрирования. Из сказанного выше ясно, что решение системы (10.6.4) является другой линейной комбинацией тех же функций  $\rho_i$ :

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^6 a_i \rho_i, \quad (10.7.5)$$

где  $a_i$  — новые постоянные интегрирования. В формуле (10.7.5), конечно, под  $\mathbf{f}$  понимается уже шестимерный вектор, включающий компоненты ускорения и производные по времени от них.

Теперь, подставляя (10.7.5) в (10.6.3), методом вариации постоянных находим частное решение

$$\rho_{**} = \sum_{i=1}^6 a_i \Phi_i, \quad (10.7.6)$$

причем выберем  $\rho_{**}$  так, чтобы  $\rho_{**}(t_0) = 0$ , то есть

$$\Phi_i(t_0) = 0. \quad (10.7.7)$$

Тогда, учитывая (10.7.4) и (10.7.3), окончательно получим

$$\rho = \sum_{i=1}^6 (c_i \rho_i + a_i \Phi_i). \quad (10.7.8)$$

Произвольные постоянные  $c_i, a_i$  дают возможность удовлетворить 12 краевым условиям (10.7.1). А именно, постоянные  $c_i, a_i$  определяются из следующей системы линейных алгебраических уравнений (напомним, что  $\rho, \rho_i, \Phi_i$  — шестимерные векторы, причем  $\Phi_i$  удовлетворяет (10.7.7)):

$$\rho_0 = \sum_{i=1}^6 c_i \rho_i(t_0), \quad (10.7.9)$$

$$\rho_k - \sum_{i=1}^6 c_i \rho_i(t_1) = \sum_{i=1}^6 a_i \Phi_i(t_1). \quad (10.7.10)$$

Из системы (10.7.9) определяются  $c_i$ , а затем решение системы (10.7.10) дает  $a_i$ . Выписанный алгоритм полностью решает краевую задачу (10.6.3), (10.6.4), (10.7.1).

## 8. Интегрирование

Выберем такую абсолютную систему координат  $XYZ$  с началом  $S$  в центре притяжения, чтобы плоскость транспортирующей траектории совпадала с плоскостью  $XY$ , а ось  $X$  была направлена в перицентр транспортирующей траектории. Транспортирующая система координат  $Oxyz$  имеет оси, параллельные соответственно осям  $XYZ$  (рис. 10.4). Уравнения движения (10.6.3) и управления (10.6.4) будем считать записанными в безразмерных

переменных. Если  $R, V, T, f_p$  — величины размерности соответственно расстояния, скорости, времени, ускорения, то соответствующие безразмерные величины  $r, v, t, f$  определим так:

$$r = \frac{R}{R_0}, \quad v = \frac{V}{\sqrt{gR_0}}, \quad t = T \sqrt{\frac{g}{R_0}}, \quad f = \frac{f_p}{g}, \quad (10.8.1)$$

где  $R_0$  — начальное расстояние от центра притяжения,  $g = \mu/R_0^2$  — ускорение силы тяготения на этом расстоянии.

При таком выборе системы координат и безразмерных переменных элементы матрицы  $A_0$  в уравнениях (10.6.3), (10.6.4) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} U_{xx}^0 &= \frac{1}{r_0^3} (3 \cos^2 v - 1), & U_{yy}^0 &= \frac{1}{r_0^3} (3 \sin^2 v - 1), \\ U_{zz}^0 &= -\frac{1}{r_0^3}, & U_{xy}^0 &= \frac{3 \cos v \sin v}{r_0^3}, & U_{xz}^0 &= U_{yz}^0 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (10.8.2)$$

$r_0(t)$  — текущий радиус транспортирующей траектории, а  $v$  — истинная аномалия вдоль нее, связанные соотношениями кеплеровского движения

$$r_0 = \frac{p}{1 + e \cos v}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{V\sqrt{p}}{r_0^2}. \quad (10.8.3)$$

В формулах (10.8.3)  $e$  означает эксцентриситет транспортирующей траектории, а  $p$  — ее безразмерный фокальный параметр.

Для интегрирования системы (10.6.3) — (10.6.4) удобно перейти к вращающейся системе координат  $O\eta\xi\zeta$ , начало которой совпадает с точкой  $O$  транспортирующей траектории (рис. 10.4), ось  $\eta$  направлена по радиусу-вектору, ось  $\xi$  — по трансверсали (в сторону движения) к транспортирующей траектории, а ось  $\zeta$  совпадает с  $z$ . Тогда

$$x = \eta \cos v - \xi \sin v, \quad y = \eta \sin v + \xi \cos v, \quad z = \zeta \quad (10.8.4)$$

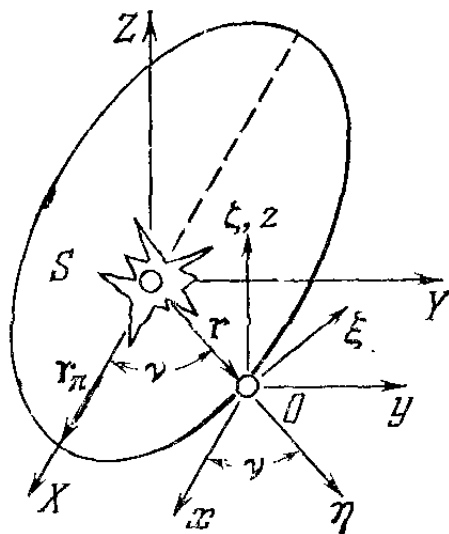


Рис. 10.4. Системы координат.

и уравнения (10.6.3) запишутся после некоторых преобразований в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\eta} - 2\omega\dot{\xi} - \omega^2\eta - \dot{\omega}\xi - \frac{2}{r_0^3}\eta &= f_\eta, \\ \ddot{\xi} + 2\omega\dot{\eta} - \omega^2\xi + \dot{\omega}\eta + \frac{1}{r_0^3}\xi &= f_\xi, \\ \ddot{\zeta} + \frac{1}{r_0^3}\zeta &= f_\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (10.8.5)$$

Здесь  $\omega = \dot{\nu}$  — угловая скорость движения по транспортирующей траектории,  $f_\eta$ ,  $f_\xi$ ,  $f_\zeta$  — проекции вектора реактивного ускорения на оси  $\eta$ ,  $\xi$ ,  $\zeta$ . Уравнения (10.8.5) можно было бы выписать сразу, пользуясь общими уравнениями относительного движения.

Отметим, что коэффициенты в (10.8.5) зависят от времени только через истинную аномалию  $\nu$ . Поэтому совершенно естественно, пользуясь соотношениями (10.8.3), перейти в (10.8.5) от независимой  $t$  к новой независимой переменной  $\nu$ . Сделав такое преобразование, получим вместо (10.8.5) систему

$$\left. \begin{aligned} \eta'' - 2\frac{\rho'}{\rho}\eta' - 2\xi' - (1 + 2\rho)\eta + \frac{2\rho'}{\rho}\xi &= p^3\rho^4 f_\eta, \\ \xi'' - 2\frac{\rho'}{\rho}\xi' + 2\eta' - (1 - \rho)\xi - \frac{2\rho'}{\rho}\eta &= p^3\rho^4 f_\xi, \\ \zeta'' - 2\frac{\rho'}{\rho}\zeta' + \rho\zeta &= p^3\rho^4 f_\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (10.8.6)$$

Здесь и в дальнейшем обозначено:

$$\rho = (1 + e \cos \nu)^{-1}, \quad \rho' = e \sin \nu (1 + e \cos \nu)^{-2}. \quad (10.8.7)$$

Штрихи означают дифференцирование по  $\nu$ .

На некоторое время забудем, что компоненты  $f_\eta$ ,  $f_\xi$ ,  $f_\zeta$  удовлетворяют в нашей задаче дифференциальному уравнению (10.6.4), и будем считать их произвольными, но известными функциями истинной аномалии  $\nu$ .

Мы получили замкнутую систему (10.8.6) с явно выписанными коэффициентами, периодически зависящими от новой независимой переменной  $\nu$ . Эта система на первый взгляд выглядит страшновато. Но мы вдохновлены уверенностью в ее интегрируемости и, не робея, приступим к делу.

Третье уравнение системы (10.8.6) не зависит от предыдущих двух, поэтому начнем с него. Прежде всего

постараемся избавиться в нем от члена с первой производной  $\zeta'$ . Как известно из теории линейных дифференциальных уравнений, это всегда можно сделать подстановкой

$$\zeta = \kappa e^{-\frac{1}{2} \int p_1 dv}, \quad (10.8.8)$$

где  $p_1$  — коэффициент при  $\zeta'$ ,  $\kappa$  — новая переменная вместо  $\zeta$ . В нашем случае  $p_1 = -2\rho'/\rho$  и подстановка (10.8.8) имеет вид

$$\zeta = \kappa \rho. \quad (10.8.9)$$

Подставив (10.8.9) в третье уравнение (10.8.6), получим

$$\kappa'' + \left[ \rho - 2 \left( \frac{\rho'}{\rho} \right)^2 + \frac{\rho''}{\rho} \right] \kappa = p^3 \rho^3 f_\zeta. \quad (10.8.10)$$

Но оказывается в силу (10.8.7), что

$$\rho - 2 \left( \frac{\rho'}{\rho} \right)^2 + \frac{\rho''}{\rho} = 1,$$

и поэтому уравнение (10.8.10) принимает простой вид, допускающий непосредственное интегрирование:

$$\kappa'' + \kappa = p^3 \rho^3 f_\zeta. \quad (10.8.11)$$

Однородное уравнение, соответствующее (10.8.11), имеет решение

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= c_5 \sin v + c_6 \cos v, \\ \kappa' &= c_5 \cos v - c_6 \sin v, \end{aligned} \right\} \quad (10.8.12)$$

где  $c_5, c_6$  — постоянные интегрирования.

Будем, согласно методу вариаций постоянных, искать решение неоднородного уравнения (10.8.11) в том же виде (10.8.12) для  $\kappa$  и  $\kappa'$ , только  $c_5$  и  $c_6$  уже будем считать зависящими от  $v$ . Тогда, как известно, для производных от  $c_5(v)$  и  $c_6(v)$  получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dc_5}{dv} \sin v + \frac{dc_6}{dv} \cos v &= 0, \\ \frac{dc_5}{dv} \cos v - \frac{dc_6}{dv} \sin v &= p^3 \rho^3 f_\zeta. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{dc_5}{dv} = p^3 \rho^3 f_\zeta \cos v, \quad \frac{dc_6}{dv} = -p^3 \rho^3 f_\zeta \sin v.$$

Проинтегрируем эти равенства, подставим в (10.8.12) и вернемся еще к исходной переменной  $\zeta$  согласно (10.8.9).  
Результат:

$$\zeta = c_5 \rho \sin v + c_6 \rho \cos v + p^3 \rho \left[ \sin v \int f_\zeta \rho^3 \cos v \, dv - \cos v \int f_\zeta \rho^3 \sin v \, dv \right]. \quad (10.8.13)$$

Третье из уравнений (10.8.6) проинтегрировано. Из (10.8.13) дифференцированием легко получить и явную формулу для  $\zeta'$ .

Нас, однако, здесь интересует скорее «технология» процесса интегрирования системы (10.8.6), чем получение полной сводки расчетных формул (такая сводка есть в первоисточнике [10.1], которому мы здесь следуем). Поэтому, отсылая за явным выражением для  $\zeta'(v)$  к [10.1], перейдем к рассмотрению первых двух уравнений (10.8.6). Решению третьего уравнения (10.8.6) очень помогла подстановка (10.8.9). Естественно опробовать аналогичную подстановку и для первых двух уравнений (10.8.6):

$$\xi = \rho \alpha, \quad \eta = \rho \beta. \quad (10.8.14)$$

Тогда эти уравнения принимают вид

$$\beta'' - 3\rho\beta - 2\alpha' = p^3 \rho^3 f_\eta, \quad \alpha'' + 2\beta' = p^3 \rho^3 f_\xi. \quad (10.8.15)$$

Подстановка (10.8.14) оказалась плодотворной: немедленно можно один раз проинтегрировать второе из уравнений (10.8.15):

$$\alpha' = c_1 - 2\beta + I_\xi, \quad I_\xi = p^3 \int \rho^3 f_\xi \, dv, \quad (10.8.16)$$

где  $c_1$  — новая постоянная интегрирования,  $I_\xi(v_0) = 0$  по определению. Подставляя теперь выражение  $\alpha'$  из (10.8.16) в первое из уравнений (10.8.15), получим

$$\beta'' + (4 - 3\rho)\beta = \Phi(v), \quad (10.8.17)$$

где

$$\Phi(v) = 2c_1 + 2I_\xi + p^3 \rho^3 f_\xi. \quad (10.8.18)$$

Что делать теперь с уравнением (10.8.17), не очень ясно, но если вернуться к исходной переменной  $\eta$  (подстановка (10.8.14) уже сделала свое дело), то вместо (10.8.17) получим теперь уравнение

$$(1 + e \cos v) \eta'' - 2e \sin v \eta' + (1 + 3e \cos v) \eta = \Phi. \quad (10.8.19)$$

Не нужно очень долго всматриваться в это уравнение, чтобы обнаружить частное решение соответствующего ему однородного уравнения

$$\eta_2 = \sin v. \quad (10.8.20)$$

Но из теории дифференциальных линейных уравнений известно, что уравнение

$$\eta'' + a_1(v)\eta' + a_2(v)\eta = 0,$$

имеющее частное решение  $\eta = \eta_2$ , имеет второе, линейно независимое частное решение, определяемое формулой

$$\eta_3 = \eta_2 \int \eta_2^{-2} e^{-\int a_1 dv} dv.$$

В нашем случае

$$a_1 = -\frac{2e \sin v}{1 + e \cos v},$$

а  $\eta_2$  дается формулой (10.8.20). Поэтому второе частное решение рассматриваемого однородного уравнения будет

$$\eta_3 = I^* \sin v, \quad I^* = \int \frac{\rho^2}{\sin^2 v} dv. \quad (10.8.21)$$

Квадратура  $I^*$  может быть вычислена в явном виде [10.1], однако выражение  $I^*(v)$  несколько громоздко. Чтобы за деревьями не потерять леса, оставим за  $I^*(v)$  компактное обозначение (10.8.21). Укажем только, что на круговой орбите ( $e = 0, \rho = 1$ )  $I^*(v) = -\text{ctg } v$ , а с точностью до первой степени эксцентриситета

$$I^*(v) \sin v \approx -\cos v + 2e. \quad (10.8.22)$$

Итак, найдены два частных решения однородного уравнения. Это позволяет уже знакомым нам методом вариации постоянных получить общее решение уравнения (10.8.19). Оно имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{c_1}{e} (I^* \sin v + \cos v) + c_2 \sin v + c_3 I^* \sin v + \\ &\quad + F_2 \sin v + I^* F_3 \sin v, \\ F_2 &= -p^3 \int \frac{I^* \sin v}{\rho} \left( \frac{2I_\xi}{p^3} + \rho^3 f_\eta \right) dv, \\ F_3 &= p^3 \int \frac{\sin v}{\rho} \left( \frac{2I_\xi}{p^3} + \rho^3 f_\eta \right) dv. \end{aligned} \right\} (10.8.23)$$

Осталось определить  $\xi(v)$ . Вернемся к уравнению (10.8.16). Так как  $\eta(v)$ , а значит, и  $\beta(v) = \eta/\rho$  нам теперь

известны, то одной квадратурой находим

$$\alpha = c_1 v - 2 \int \frac{\eta}{\rho} dv + \int I_\xi dv + c_4. \quad (10.8.24)$$

Учитывая теперь (10.8.14) и (10.8.23), получим

$$\left. \begin{aligned} \xi &= c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + c_3 \xi_3 + c_4 \xi_4 + \rho \Psi, \\ \xi_1 &= \rho \left( v - \frac{2}{e} \int \frac{I^* \sin v + \cos v}{\rho} dv \right), \\ \xi_2 &= \rho (2 + e \cos v) \cos v, \\ \xi_3 &= -2 \int \frac{I^* \sin v}{\rho} dv, \quad \xi_4 = \rho, \\ \Psi &= \int \left[ I_\xi - \frac{2}{\rho} (F_2 \sin v + I^* F_3 \sin v) \right] dv. \end{aligned} \right\} \quad (10.8.25)$$

Выражения для  $\eta'$  и  $\xi'$  получаются из (10.8.23), (10.8.25) дифференцированием. Тем самым интегрирование в квадратурах системы (10.8.6) завершено.

Квадратуры, входящие в  $\xi_1$  и  $\xi_3$ , вычисляются в конечном виде; эти явные выражения приведены в работе [10.1], в полной сводке расчетных формул. Выражение в явном виде квадратур  $I_\xi$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ ,  $\Psi$ , вообще говоря, проблематично. Это зависит от вида управлений  $f_\eta$ ,  $f_\xi$ ,  $f_\zeta$ . При практических массовых расчетах траекторий названные квадратуры удобней, по-видимому, находить численными методами; однако вполне реальные случаи, когда эти квадратуры окажется возможным выписать в явном виде.

Трудности проведенного интегрирования системы (10.8.6) связаны с переменностью ее коэффициентов, или, иными словами, с эллиптичностью транспортирующей траектории. Поэтому мы вынуждены были решать систему (10.8.6) для произвольных значений эксцентриситета  $e < 1$ . Зато полученные формулы могут быть употреблены (и действительно употреблялись в [10.1 — 10.4]) для расчета траекторий межпланетных управляемых полетов с произвольным реактивным ускорением (в частности, с оптимальным).

## 9. О задачах относительного движения

Однако эти формулы имеют гораздо более общее значение. С их помощью можно решать целый класс задач относительного движения близких космических тел и другие задачи. Назовем некоторые из них.



1. *Вариация кеплеровского движения и изохронные производные.* Никакая заранее рассчитанная траектория не может быть реализована абсолютно точно. Этому мешают многочисленные (хоть и малые обычно) ошибки в исполнении траектории, в допущениях, сделанных при ее расчете, и т. п. Отклонение действительной кеплеровской траектории межпланетного полета от расчетной (как говорят, от номинальной) можно найти по полученным формулам, положив  $|\dot{\mathbf{f}}| \equiv 0$ . Номинальная траектория при этом выступает в роли транспортирующей. Определяя константы интегрирования через начальные данные и собирая члены при начальных координатах и скоростях ( $\eta_0, \eta'_0$  и т. д.), получим выражения для так называемых *изохронных производных* кеплеровского движения. Изохронные производные играют большую роль в теории космических полетов. Они дают возможность вычислить отклонение по каждой координате (или компоненте скорости) в каждый момент времени. Если отклонения чересчур велики, можно дать команду на коррекцию (исправление) траектории и рассчитать импульс, потребный для коррекции.

2. *Задача о движении тела в окрестности спутника.* Например, можно рассмотреть движение космонавта в окрестности спутника-станции как при наличии у космонавта «заплечного» реактивного аппарата ( $f \neq 0$ ), так и при отсутствии такого аппарата ( $f = 0$ ). Можно выявить «опасные» режимы (или исходные положения относительно спутника), когда космонавту грозит удаление от спутника.

3. *Задача о сближении двух космических объектов.* Предполагая, что на предыдущем этапе один космический объект уже выведен в окрестность другого, можно рассмотреть заключительный этап — управление реактивным ускорением  $f$ , обеспечивающее встречу с наименьшей относительной скоростью (посадка ракеты на спутник-станцию, монтирование спутника-станции и т. п.) или с произвольной скоростью. В эту последнюю задачу можно не вводить реактивное ускорение ( $f \equiv 0$ ), а искать импульс (то есть начальные значения компонент скорости), обеспечивающий встречу.

4. *Движение облака частиц, выброшенных со спутника, относительно спутника.*

5. *Получение заданной орбиты при помощи добавочного импульса или реактивного ускорения, то есть задача о малом изменении исходной орбиты космического тела.*

6. *Кратковременное действие возмущающих факторов на орбиту.*

Для многих из перечисленных задач транспортирующая траектория может быть выбрана слабоэллиптической ( $e$  мало), а иногда и круговой. Это существенно упрощает расчетные формулы: их можно выписать с точностью лишь до первой степени эксцентриситета  $e$  или даже положить  $e = 0$ . В этом последнем случае исходные уравнения (10.8.6) содержат лишь постоянные коэффициенты в левых частях ( $\rho' = 0$ ,  $\rho = 1$ ). Это принципиально упрощает их интеграцию. Конечно, решение можно получить и предельным переходом ( $e \rightarrow 0$ ) из общих формул (10.8.13), (10.8.23), (10.8.25). Для раскрытия неопределенности в первом члене в выражении (10.8.23) для  $\eta$  и, соответственно, в  $\xi_1$  следует воспользоваться аппроксимацией (10.8.22). В остальном предельный переход  $e \rightarrow 0$  осуществляется просто: полагаем  $I^* = -\text{ctg } \nu$ ,  $\rho = 1$ , а также  $P = 1$ . Результат — решение уравнений (10.8.6) для случая круговой транспортирующей траектории — запишется так:

$$\eta = 2c_1 + c_2 \sin \nu - c_3 \cos \nu + \sin \nu \int \cos \nu \left( 2 \int f_{\xi} dv + f_{\eta} \right) dv + \cos \nu \int \sin \nu \left( 2 \int f_{\xi} dv + f_{\eta} \right) dv, \quad (10.9.1)$$

$$\xi = -3c_1 \nu + 2c_2 \cos \nu + 2c_3 \sin \nu + c_4 + \int \left\{ \int f_{\xi} dv - 2 \left[ \sin \nu \int \cos \nu \left( 2 \int f_{\xi} dv + f_{\eta} \right) dv + \cos \nu \int \sin \nu \left( 2 \int f_{\xi} dv + f_{\eta} \right) dv \right] \right\} dv, \quad (10.9.2)$$

$$\zeta = c_5 \sin \nu + c_6 \cos \nu + \sin \nu \int f_{\xi} \cos \nu dv + \cos \nu \int f_{\xi} \sin \nu dv. \quad (10.9.3)$$

Квадратуры, входящие в эти формулы, уже легче вычисляются, чем в общем случае эллиптической транспортирующей траектории. В ряде случаев (например, постоянные компоненты  $f_{\eta}$ ,  $f_{\xi}$ ,  $f_{\zeta}$ ) квадратуры берутся совсем просто. В формулах (10.9.1) — (10.9.3), как и в исходных общих формулах (10.8.13), (10.8.23), (10.8.25), управления  $f_{\eta}$ ,  $f_{\xi}$ ,  $f_{\zeta}$  считались произвольными функциями истинной аномалии  $\nu$ . Однако более всего нас интересует случай, когда эти компоненты удовлетворяют уравнениям (10.6.4) оптимального управления. Тогда, как следует из рассуждений пункта 7 (см. формулу (10.7.5)), решение уравнений оптимального управления в общем случае

эллиптической транспортирующей траектории запишется в виде

$$\left. \begin{aligned} f_{\eta} &= \frac{a_1}{e} (I^* \sin v + \cos v) + a_2 \sin v + a_3 I^* \sin v, \\ f_{\xi} &= a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_3 + a_4 \xi_4, \\ f_{\zeta} &= a_5 \rho \sin v + a_6 \rho \cos v. \end{aligned} \right\} \quad (10.9.4)$$

Здесь  $a_1, \dots, a_6$  — новые произвольные постоянные,  $\xi_1, \dots, \xi_4$  даются формулами (10.8.25).

Подставляя (10.9.4) в формулы (10.8.23), (10.8.25) и (10.8.13), получим полное решение в квадратурах задачи (10.6.3) — (10.6.4) оптимального перелета. По таким формулам была проведена целая серия расчетов траекторий полетов к Марсу, Венере, Юпитеру [10.1 — 10.3]. Некоторые результаты этих расчетов мы сейчас рассмотрим.

## 10. Результаты расчетов оптимальных межпланетных траекторий

Ценность решенной задачи механики космического полета зачастую определяется возможностью доведения решения «до числа». Путь «доводки до числа», как правило, нелегок. Так, в рассматриваемом нами методе расчета оптимальных траекторий необходимо проделать по крайней мере такую расчетную работу: определить положения и скорости планет в моменты старта  $t_0$  и финиша  $t_1$ ; рассчитать транспортирующую траекторию; вычислить краевые условия в поступательно-перемещающейся транспортирующей системе координат  $Oxyz$  и пересчитать эти краевые условия во вращающуюся транспортирующую систему  $O\eta\xi\zeta$ ; вычислить квадратуры, входящие в решение нашей задачи (10.8.13), (10.8.23), (10.8.25); решить краевую задачу по схеме, описанной в п. 7, и рассчитать траекторию и управление в транспортирующей системе координат  $O\eta\xi\zeta$ ; пересчитать их в системе  $Oxyz$ .

Для оценки точности метода транспортирующих траекторий в отдельных случаях надо рассчитать (по еще более сложному алгоритму!) траекторию, соответствующую точным уравнениям (10.5.1), и сравнить ее с траекторией, рассчитанной приближенно. Вся эта «кухня» осталась за бортом нашего изложения, так как она выпадает из плана и стиля книги. Однако именно здесь автор считает уместным напомнить своему читателю-студенту, что

современная серьезная работа в области механики космического полета часто неизбежно связана с такой вычислительной «кухней». Конечно, такая работа немыслима без электронных вычислительных машин.

Итак, оставляя в стороне описание «кухни» расчетов, обратимся к их результатам.

На рис. 10.5—10.8 изображены некоторые характеристики полета к Марсу. Чтобы можно было составить

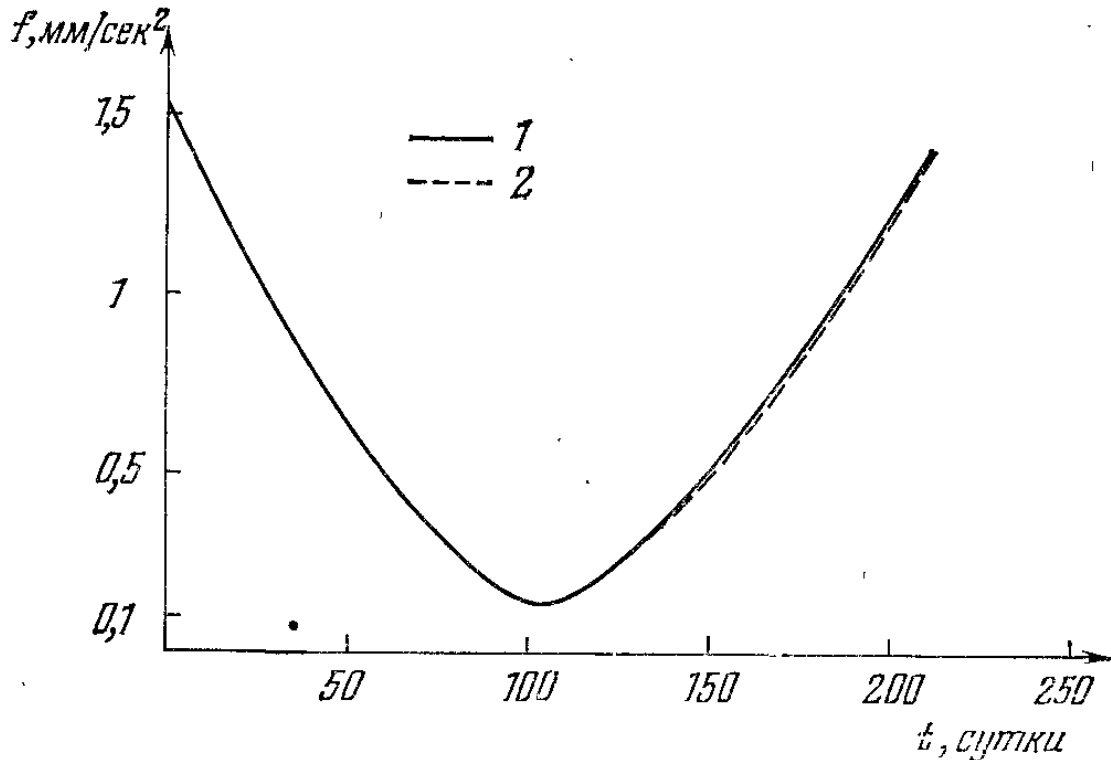


Рис. 10.5. Изменение величины реактивного ускорения со временем: 1 — точный расчет, 2 — приближенный расчет.

представление о точности метода транспортирующих траекторий, на этих рисунках даны и точные, и приближенные характеристики. Как изменяется реактивное ускорение по величине и направлению, видно из рис. 10.5, 10.6. На рис. 10.7 — траектории полета к Марсу: точная, приближенная и транспортирующая. Время полета — 212 суток. Наконец, на рис. 10.8 изображена траектория полета (рассчитанная по приближенным формулам) в транспортирующей системе координат. Видно, что максимальное отклонение от начала координат не превышает 7 млн. км, в то время как сам полет имеет протяженность в сотни млн. км. Из рисунков видно, насколько малы потребные величины реактивного ускорения (максимум —  $1,5 \text{ мм/сек}^2$ ).

Важной характеристикой полета является его угловая дальность  $\Phi$ , то есть угол, заметаемый радиусом-вектором космического аппарата от начала координат до конца

полета. Для рассматриваемого на рис. 10.5—10.8 примера  $\Phi \sim 150^\circ$ . Именно для таких, не очень больших угловых дальностей метод транспортирующих траекторий оказывается достаточно точным. Ведь тогда траектория полета действительно не очень отличается от дуги соответственно подобранного эллипса. Если же угловые дальности велики ( $360^\circ$ ,  $720^\circ$  и т. д.), так что полет представляет собой, например, участок спирали, лежащей между орбитами старта и назначения, то никакая кеплеровская траектория не может быть достаточно близкой к истинной траектории полета с малой тягой, и метод транспортирующих траекторий пасует.

Но следует иметь в виду, что наиболее интересные для практики полеты имеют небольшую угловую дальность, так как тогда и время полета будет невелико. Поэтому метод транспортирующей траектории хорош именно тем, что позволяет быстро и высокоточно рассчитать множество практически наиболее интересных траекторий.

Рис. 10.9 дает представление о том, насколько мы ошибемся в вычислении основной характеристики полета — интеграла  $I$ , если используем метод транспортирующей траектории. На этом рисунке дано в зависимости от  $\Phi$  отношение  $\Delta I/I$  (в процентах), где  $I$  — точное значение интеграла,  $\Delta I$  — ошибка в его вычислении методом транспортирующих траекторий. При полетах с угловой дальностью  $225\text{—}235^\circ$  ошибка составляет всего 1—5%, но резко возрастает с увеличением  $\Phi$  сверх  $235^\circ$ . При

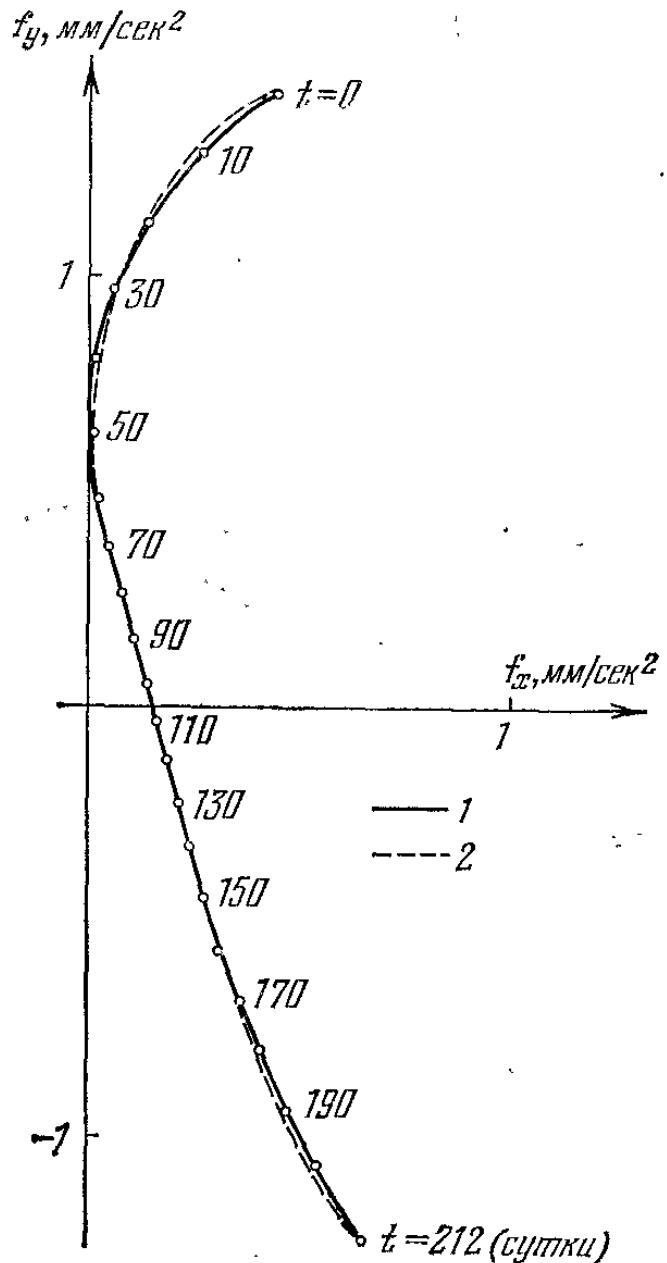


Рис. 10.6. Изменение величины и направления реактивного ускорения: 1 — точный расчет, 2 — приближенный расчет.

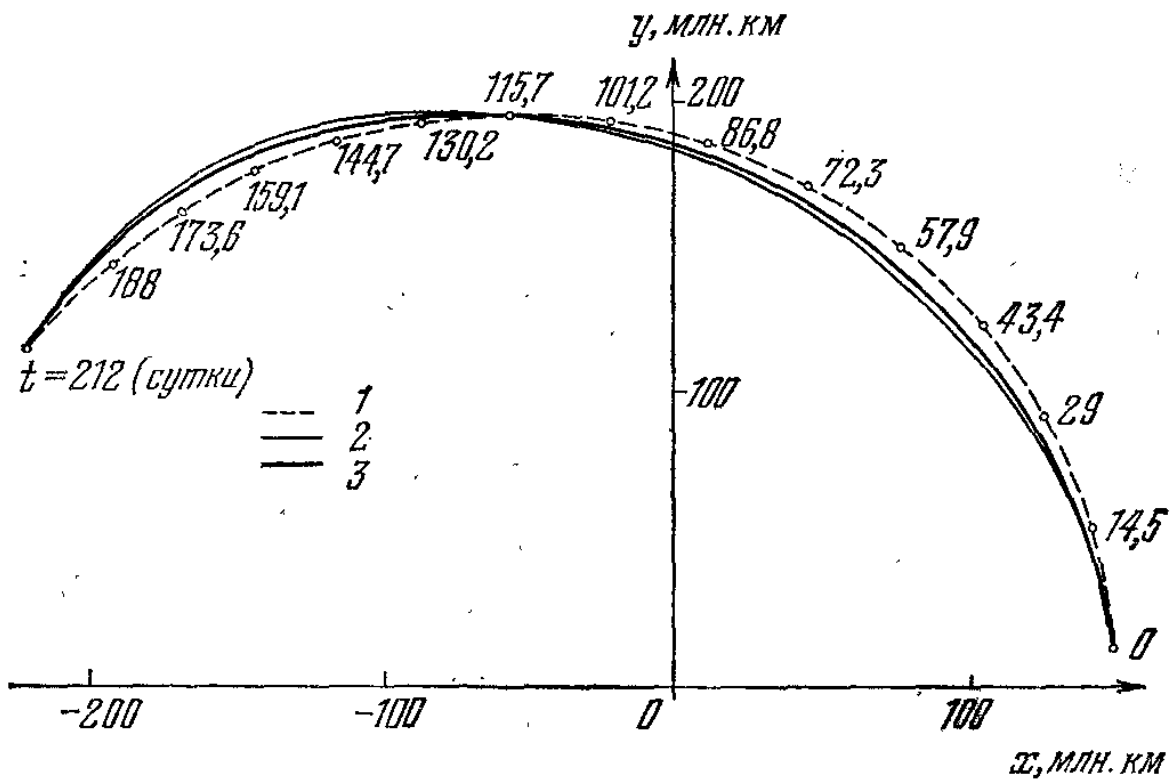


Рис. 10.7. Траектории полета к Марсу: 1 — транспортирующий эллипс, 2 — приближенная траектория, 3 — точная траектория.

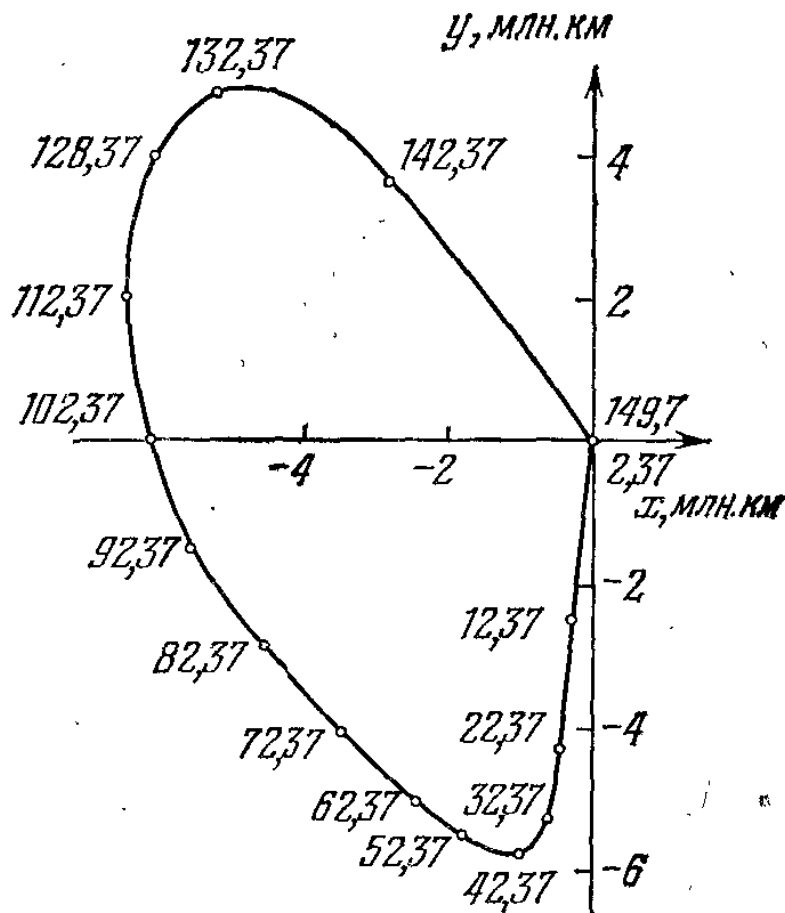


Рис. 10.8. Траектория в транспортирующей системе координат. Вдоль траектории указаны значения истинной аномалии на транспортирующем эллипсе.

$\Phi \sim 180^\circ$  ошибка составляет ничтожную величину: десятые, а то и сотые доли процента. Отметим еще, что полеты с совсем малыми угловыми дальностями ( $\Phi < 50^\circ$ ) не очень интересны, так как требуют весьма больших значений величины реактивного ускорения.

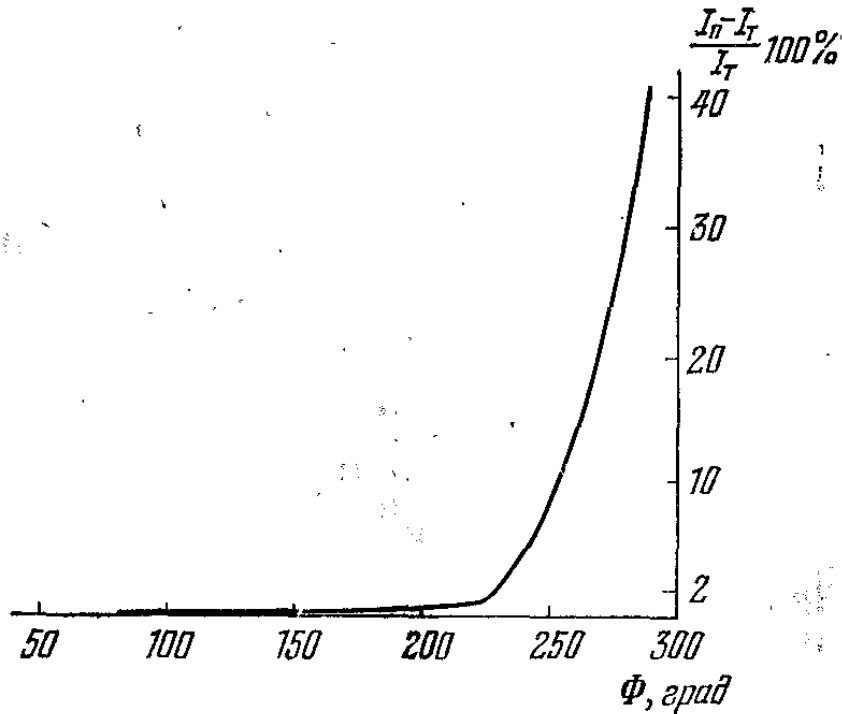


Рис. 10.9. Зависимость ошибки приближенного расчета величины  $I$  от угловой дальности  $\Phi$  полета к Марсу и Венере.

Некоторые характеристики полетов к Марсу и Венере, вычисленные по изложенной приближенной методике, и их сравнение с точными характеристиками даются в таблице 10.1, где  $T$  — полное время полета, а  $\Phi$  — угловая

ТАБЛИЦА 10.1

Некоторые характеристики полетов к Марсу и Венере

	Даты старта и финиша	$I$ , $\text{м}^2/\text{сек}^3$	$T$ , сут	$\Phi$	$f_K$ , $\text{мм}/\text{сек}^2$	$f_0$ , $\text{мм}/\text{сек}^2$	$\frac{I_{\Pi} - I_T}{I_T} 100\%$
к Марсу	28.IX.1960	11,53	212	$147^\circ, 38$	1,44	1,51	0,09
	28.IV.1961	11,54			1,43	1,52	
к Марсу	15.XI.1964	3,23	330	$222^\circ, 65$	0,405	0,89	0,94
	11.X.1965	3,20			0,42	0,88	
к Венере	22.III.1964	26,44	121	$136^\circ, 35$	4,02	1,85	0,04
	21.VII.1964	26,43			4,08	1,845	
к Венере	11.XII.1963	11,975	220	$234^\circ, 79$	2,25	1,26	5,18
	18.VII.1964	11,385			2,24	1,15	

дальность полета между сферами действия планет,  $f_k$ ,  $f_0$  — конечная и начальные величины модуля реактивного ускорения; в последней колонке указано отличие приближенного значения  $I_{\text{п}}$  от точного  $I_{\text{т}}$  в процентах к  $I_{\text{т}}$ . В столбцах  $I$ ,  $f_k$ ,  $f_0$  содержатся приближенные (верхние) и точные (нижние) значения величин.

Отметим теперь, что оптимальное управление, как видим, очень сложно для осуществления. Реактивное ускорение сильно меняется по величине и направлению. А ведь одним из инженерных требований всегда является, по возможности, простота управления. Выигрывая в массе доставляемого на другую планету груза, мы проигрываем в простоте и, следовательно, в надежности полета. Поэтому законен вопрос: нельзя ли аппроксимировать оптимальное управление более простым по исполнению? Пусть, например, в начале полета ускорение постоянно по величине и направлению, в середине полета реактивные двигатели вообще отключены (пассивный участок полета), а в конце полета снова ускорение постоянно по величине и направлению. Есть надежда, что такое «ступенчатое» управление в какой-то степени аппроксимирует оптимальное.

В. В. Голубковым были рассмотрены [10.3] два простейших ступенчатых закона управления. Пусть

$$\mathbf{f}(t) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f}, \quad 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, \quad \tau \leq t \leq \tau + \Delta\tau, \\ \mathbf{g}, \quad \tau + \Delta\tau \leq t \leq T. \end{array} \right\} \quad (10.10.1)$$

В. В. Голубковым рассматривались два случая реализации закона (10.10.1): 1)  $f = g$ ; 2)  $f \neq g$ . Здесь  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}$  — реактивные ускорения соответственно на первом и третьем участках полета, представляющие собой векторные постоянные,  $t$  — текущее время,  $T$  — время полета,  $\tau$  — время работы двигателя на первом участке полета,  $\Delta\tau$  — длительность пассивного участка полета,  $f = |\mathbf{f}|$ ,  $g = |\mathbf{g}|$ . Таким образом, траектория содержит, вообще говоря, два активных и один пассивный участок. Параметры закона управления используются для удовлетворения краевым условиям и условию минимизации  $I$ .

Были проведены численные расчеты полетов Земля — Марс при некоторой фиксированной дате старта по методу транспортирующих траекторий и в точной постановке (в точной постановке уравнения движения интегрировались



$f \neq 0$ 

T, сутки	Ф, град	Приближенная задача					Точная задача					$\frac{ I_{II} - I_T }{I_T} \cdot 100\%$
		$I,$ м <sup>2</sup> /сек <sup>3</sup>	$f,$ мм/сек <sup>2</sup>	$g,$ мм/сек <sup>2</sup>	$\frac{\tau \text{ в долях } T}{\tau, \text{ сут}}$	$\frac{\Delta \tau \text{ в долях } T}{\Delta \tau, \text{ сут}}$	$I,$ м/сек <sup>3</sup>	$f,$ мм/сек <sup>2</sup>	$g,$ мм/сек <sup>2</sup>	$\frac{\tau \text{ в долях } T}{\tau, \text{ сут}}$	$\frac{\Delta \tau \text{ в долях } T}{\Delta \tau, \text{ сут}}$	
150	128	93,77	2,446	3,943	$\frac{0,311}{47}$	$\frac{0,343}{52}$	93,00	2,451	3,896	$\frac{0,311}{47}$	$\frac{0,339}{51}$	0,83
250	176	8,690	0,784	0,849	$\frac{0,271}{68}$	$\frac{0,402}{101}$	8,639	0,792	0,837	$\frac{0,267}{67}$	$\frac{0,402}{100}$	0,57
350	232	4,251	0,694	0,255	$\frac{0,228}{80}$	$\frac{0,302}{106}$	4,151	0,695	0,263	$\frac{0,218}{76}$	$\frac{0,318}{111}$	2,41
400	263	4,623	0,612	0,238	$\frac{0,276}{110}$	$\frac{0,192}{77}$	3,870	0,644	0,198	$\frac{0,213}{85}$	$\frac{0,182}{73}$	19,7
500	326						3,510	0,467	0,181	$\frac{0,261}{130}$	$\frac{0,000}{0}$	
600	381						3,865	0,340	0,218	$\frac{0,391}{235}$	$\frac{0,000}{0}$	
700	428						4,464	0,344	0,211	$\frac{0,398}{279}$	$\frac{0,000}{0}$	

$$f = 0$$

Т, сутки	Ф, град	Приближенная задача				Точная задача				$\frac{ I_{\text{П}} - I_{\text{Т}} }{I_{\text{Т}}} \cdot 100\%$
		$I, \text{ м}^2/\text{сек}^3$	$f, \text{ мм}/\text{сек}^2$	$\frac{\tau \text{ в ДОЛЯХ } T}{\tau, \text{ с/ут}}$	$\frac{\Delta \tau \text{ в ДОЛЯХ } T}{\Delta \tau, \text{ с/ут}}$	$I, \text{ м}^2/\text{сек}^3$	$f, \text{ мм}/\text{сек}^2$	$\frac{\tau \text{ в ДОЛЯХ } T}{\tau, \text{ с/ут}}$	$\frac{\Delta \tau \text{ в ДОЛЯХ } T}{\Delta \tau, \text{ с/ут}}$	
150	128	98,173	3,493	$\frac{0,225}{34}$	$\frac{0,379}{57}$	97,098	3,456	$\frac{0,228}{34}$	$\frac{0,372}{56}$	1,11
250	176	8,710	0,824	$\frac{0,250}{63}$	$\frac{0,406}{102}$	8,649	0,819	$\frac{0,253}{63}$	$\frac{0,403}{101}$	0,70
350	232	5,070	0,520	$\frac{0,362}{127}$	$\frac{0,379}{133}$	5,027	0,518	$\frac{0,361}{126}$	$\frac{0,381}{133}$	0,85
400	263	5,442	0,461	$\frac{0,390}{156}$	$\frac{0,278}{111}$	4,903	0,441	$\frac{0,399}{160}$	$\frac{0,268}{107}$	10,9
500	326					4,570	0,342	$\frac{0,451}{225}$	$\frac{0,095}{48}$	
600	381					4,325	0,306	$\frac{0,476}{286}$	$\frac{0,025}{15}$	
700	428					7,287	0,419	$\frac{0,331}{232}$	$\frac{0,312}{219}$	

численно). Некоторые из результатов расчетов приведены в таблицах 10.2 и 10.3.

Из таблиц 10.2 и 10.3 видно, что точность расчета ступенчатого управления одинакова с точностью расчета оптимального управления (рис. 10.9). Это дает право сравнить величины интеграла  $I$  в ступенчатом и оптимальном управлении при приближенном расчете соответствующих траекторий.

Такое сравнение покажет, что мы теряем, вводя ступенчатое управление вместо оптимального. Соответствующие данные для полетов Земля — Марс выписаны в приведенной ниже таблице 10.4. В ней  $I_{opt}^{(1)}$  — значение интеграла  $I$  для оптимального управления в первом приближении,  $I_1$  — значение интеграла  $I$  для ступенчатого управления в первом приближении,  $T$  — время полета,  $\Phi$  — угловая дальность.

ТАБЛИЦА 10.4

Оптимальный закон			$f = g$		$f \neq g$	
$\Phi$ , град	$T$ , сут	$I_{opt}^{(1)}$ , м <sup>2</sup> /сек <sup>3</sup>	$I_1$ , м <sup>2</sup> /сек <sup>3</sup>	$\frac{ I_1 - I_{opt}^{(1)} }{I_1} \cdot 100\%$	$I_1$ , м <sup>2</sup> /сек <sup>3</sup>	$\frac{ I_1 - I_{opt}^{(1)} }{I_1} \cdot 100\%$
128	150	85,0	98,2	15,5	93,8	9,2
152	200	21,4	25,4	18,7	24,1	12,6
176	250	7,5	8,71	16,1	8,69	15,9
203	300	4,2	5,4	28,6	5,0	19,0
232	350	3,3	5,0	51,5	4,3	39,4

Это сравнение показывает, что по энергетике (в смысле  $I$ ) оптимальный закон управления заметно отличается от ступенчатого. Как видно из таблицы 10.4, это отличие зависит от времени полета. При времени полета 150 суток выигрыш по энергетике оптимального закона управления по сравнению со ступенчатым составляет 9,2% в случае  $f \neq g$  и 15,5% в случае  $f = g$ . Для времени полета 350 суток этот выигрыш составляет соответственно 39,4% и 51,5%. Ступенчатое управление в случае  $f \neq g$  заметно выгоднее, чем в случае  $f = g$ .

Анализ точного расчета полетов Земля — Марс со ступенчатым управлением (см. таблицы 10.2 и 10.3) показал, что имеется минимум  $I$  по времени полета  $T$  при фиксированной дате старта. Этот минимум

достаточно пологий, что позволяет варьировать время полета в довольно широких пределах (порядка 200 суток), не изменяя существенно значения  $I$ . Кроме того, как видно из таблиц 10.2 и 10.3, этот минимум достигается при достаточно большом времени полета  $T$  (530 суток при  $f = g$  и 500 суток при  $f \neq g$ ).

Отметим также, что при  $f = g$  минимум  $I$  может достигаться на траекториях, не имеющих пассивного участка (см. таблицу 10.2).

В случае оптимальных траекторий ситуация будет иная. Точные расчеты оптимальных траекторий показывают, что для них нет таких значений времен полета  $T$ , чтобы  $I$  достигло минимума. Чем больше время  $T$ , тем меньше будет  $I$  (и тем больше витков спирали вокруг Солнца опишет траектория полета). При  $T \rightarrow \infty$   $I \rightarrow 0$ , и мы могли бы сильно сэкономить на топливе, если бы человеческая жизнь не была столь коротка.

В заключение этого пункта отметим, что использование приближенного метода транспортирующей траектории позволяет сократить время счета в среднем в семь — десять раз по сравнению со временем точного расчета. Это весьма эффективно сказывается при массовых расчетах целых серий траекторий.

## 11. Представление результатов расчетов серий траекторий

Когда траекторий рассчитывается достаточно много, важно наглядно представить результаты этих расчетов так, чтобы по ним удобно было выбирать траектории с нужными характеристиками.

В качестве основных определяющих параметров возьмем моменты начала  $t_1$  и конца  $t_2$  полета между сферами действия планет. Во всех случаях при расчетах требовалось, чтобы скорость аппарата относительно планеты в момент выхода из ее сферы действия равнялась нулю.

Для представления результатов используем [10.2, 10.3] плоскость  $t_1, t_2$  (рис. 10.10). В этой плоскости удобно рассматривать различные семейства изолиний, в частности линии одинаковых реактивных ускорений или одинакового расхода топлива. Каждому полету «туда» на этой плоскости отвечает точка  $(t_1, t_2)$  над биссектрисой первого квадранта, поскольку  $t_2 > t_1$ .

Величина необходимого для данного полета реактивного ускорения (или величина  $I$ ) определяется изолинией,

проходящей через эту точку. Биссектриса соответствует полетам с бесконечно большой скоростью. Если для обратных полетов на ординате откладывать время начала полета  $t'_1$ , а на абсциссе той же плоскости время завершения полета  $t'_2$ , то обратным полетам будут отвечать точки под биссектрисой этой плоскости, так как  $t'_2 > t'_1$ .

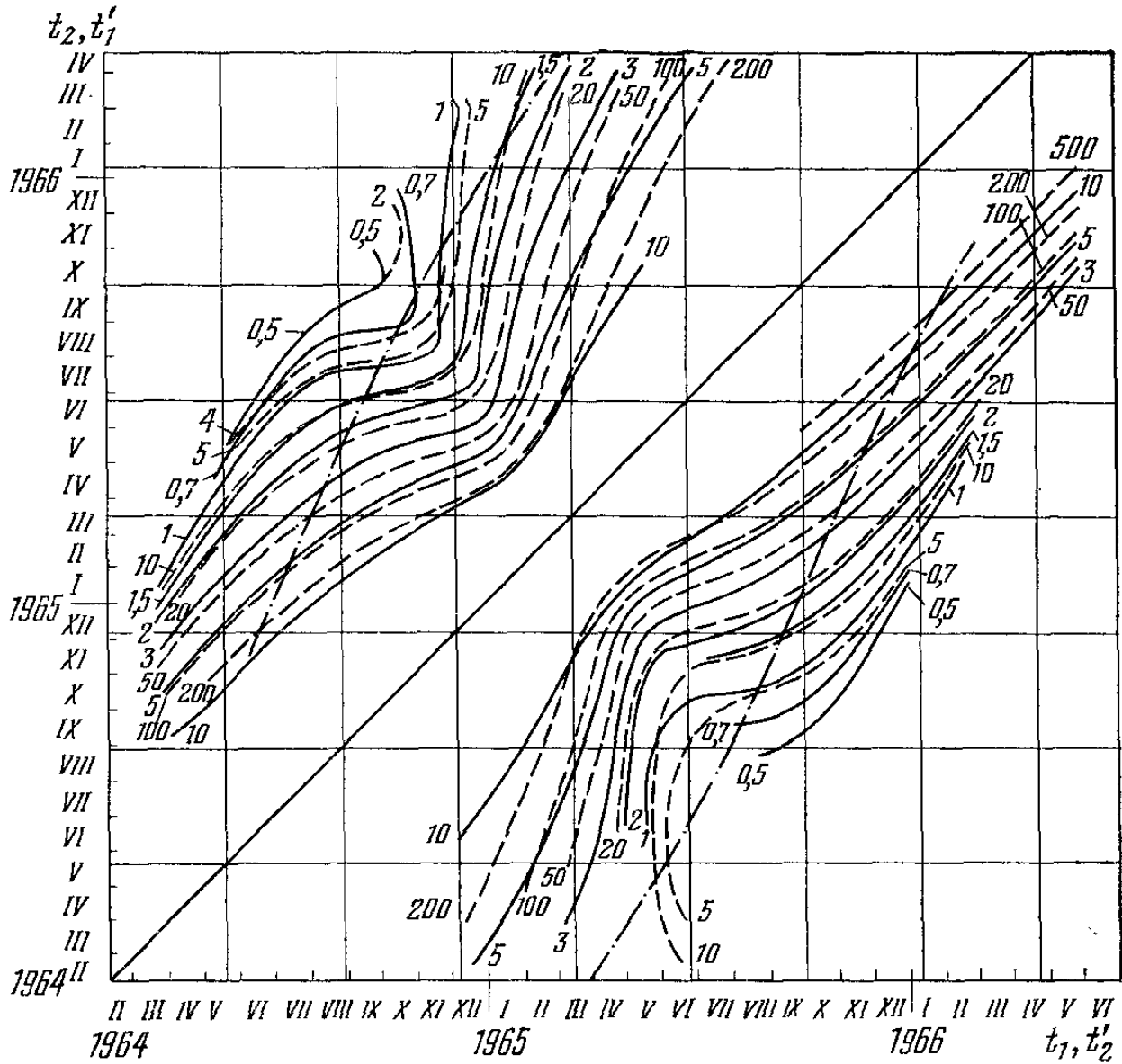


Рис. 10.10. Изолинии характеристик полета к Марсу. Сплошные линии — изолинии максимальных ускорений (в  $мм/сек^2$ ); пунктирные линии — изолинии значений  $I$  (в  $м^2/сек^3$ ).

Чтобы пара точек  $(t_1, t_2)$ ,  $(t'_1, t'_2)$  могла представлять полет туда и обратно, необходимо, чтобы было  $t'_1 \geq t_2$ ; при этом разность  $t'_1 - t_2$  есть время пребывания вблизи планеты назначения. Разность  $T_\Sigma = t'_2 - t_1$ , равная расстоянию по горизонтали между точками  $(t_1, t_2)$  и  $(t'_1, t'_2)$ , очевидно, представляет собой полное время экспедиции.

На плоскости  $t_1, t_2$  представим результаты расчета интеграла  $I$  в виде линий  $I = \text{const}$ . Кроме этих линий

построим изолинии максимальных величин реактивного ускорения.

Анализ на плоскости  $t_1, t_2$  позволяет определить характеристики совокупности траекторий полетов к планетам, а также траекторий с возвращением на Землю.

Для примера на рис. 10.10 приведены изолинии  $f_{\max} = \text{const}$ ,  $I = \text{const}$  для полетов к Марсу в 1964—1965 годах (пусть читателя не удивляют эти даты — они всего лишь пример). Аналогичные изолинии в плоскости  $t_1, t_2$  рассчитаны были в работах [10.2, 10.3] и для полетов к Венере и Юпитеру.

В следующих таблицах приводятся характеристики наиболее интересных траекторий со стартами в 1964—1965 годах. Эти характеристики удалось получить именно с помощью анализа изолиний  $I = \text{const}$  и  $f_{\max} = \text{const}$  на плоскости  $t_1, t_2$ . В таблицах 10.5—10.7 приведены характеристики полетов соответственно к Марсу, Венере и Юпитеру с возвращением на Землю. В первом столбце таблиц приведены значения максимального реактивного ускорения  $f_{\max}$  в рассматриваемом полете; во втором столбце — дата старта  $t_{c1}$ ; в третьем столбце — полное время полета  $T_{\Sigma}$  (в сутках) с учетом времени, потребного на торможение в сфере действия планеты (до круговой орбиты с высотой  $h = 300$  км при полете к Марсу и Венере и с высотой пятого спутника Юпитера Амальтеи при полете к Юпитеру) и обратный разгон; в четвертом столбце — потребные значения интеграла  $I = I_{T, 0}$  на полет между сферами действия планет (туда и обратно); в пятом столбце — полное потребное значение интеграла  $I = I_{\Sigma}$  с учетом затрат на торможение и обратный разгон. Затраты на торможение около планеты и обратный разгон легко вычислить, зная характеристики такого торможения и разгона (см., например, седьмой очерк в этой книге).

Из таблиц 10.5—10.7 видно, что максимальное ускорение  $2 \div 3$  мм/сек<sup>2</sup> обеспечивает приблизительно полугодовые полеты к Марсу или Венере с возвращением на Землю, а также полет к Юпитеру с возвращением на Землю в трехгодичный срок. Полугодовой полет к Марсу возможен даже при  $f_{\max} = 1$  мм/сек<sup>2</sup>.

Рассматривая плоскость  $t_1, t_2$ , можно заметить одно свойство оптимальных траекторий: наличие даты старта, обеспечивающей резкий минимум в значениях  $I$  и  $f_{\max}$  при заданном времени полета. Действительно, геометрическое место точек равных времен полета  $T_0$  есть

**Некоторые характеристики полетов к Марсу  
и обратно с минимальным суммарным временем  
полета**

I	II	III	IV	V
$f_{\max},$ мм/сек <sup>2</sup>	$t_{\text{ст}}$	$T_{\Sigma},$ сут	$I_{T,0},$ м <sup>2</sup> /сек <sup>3</sup>	$I_{\Sigma},$ м <sup>2</sup> /сек <sup>3</sup>
1	20.XI 1964 г.	564	13,5	18,7
2	20.XII 1964 г.	470	37	47,4
5	3.I 1965 г.	330	170	196
10	6.II 1965 г.	236	500	550

ТАБЛИЦА 10.6

**Некоторые характеристики полетов к Венере  
и обратно с минимальным временем полета**

I	II	III	IV	V
$f_{\max},$ мм/сек <sup>2</sup>	$t_{\text{ст}}$	$T_{\Sigma},$ сут	$I_{T,0},$ м <sup>2</sup> /сек <sup>3</sup>	$I_{\Sigma},$ м <sup>2</sup> /сек <sup>3</sup>
3	4.V 1964 г.	490	45	84
5	1.IX 1964 г.	340	125	185
10	9.I 1965 г.	200	350	454

ТАБЛИЦА 10.7

**Некоторые характеристики полетов к Юпитеру  
и обратно**

I	II	III	IV	V
$f_{\max},$ мм/сек <sup>2</sup>	$t_{\text{ст}}$	$T_{\Sigma},$ сут	$I_{T,0},$ м <sup>2</sup> /сек <sup>3</sup>	$I_{\Sigma},$ м <sup>2</sup> /сек <sup>3</sup>
2	2.VII 1965 г.	1090	85	178
3	21.VIII 1965 г.	1000	135	275
5	10.X 1965 г.	890	320	562

прямая, параллельная биссектрисе первого квадранта на плоскости  $t_1, t_2$ . Эта прямая пересекает некоторые изолинии в двух точках — значит, полет со временем  $T_0$  возможен (с данным значением  $I$ ) при двух датах старта. Одна-единственная изолиния  $I = I_0$  касается прямой

$t_2 - t_1 = T_0$ ;  $I_0$  как раз и есть минимально возможное значение  $I$  для полета со временем  $T_0$ , а соответствующая дата старта оптимальна. Оптимальные даты старта приходится на октябрь 1964 года — январь 1965 года, как видно из рис. 10.10.

При  $I < I_0$  полет со временем  $T_0$  невозможен (соответствующие изолинии не пересекают прямую  $t_2 - t_1 = T_0$ ). Зависимость интеграла  $I$  от даты старта при фиксированных продолжительностях перелета Земля — Марс

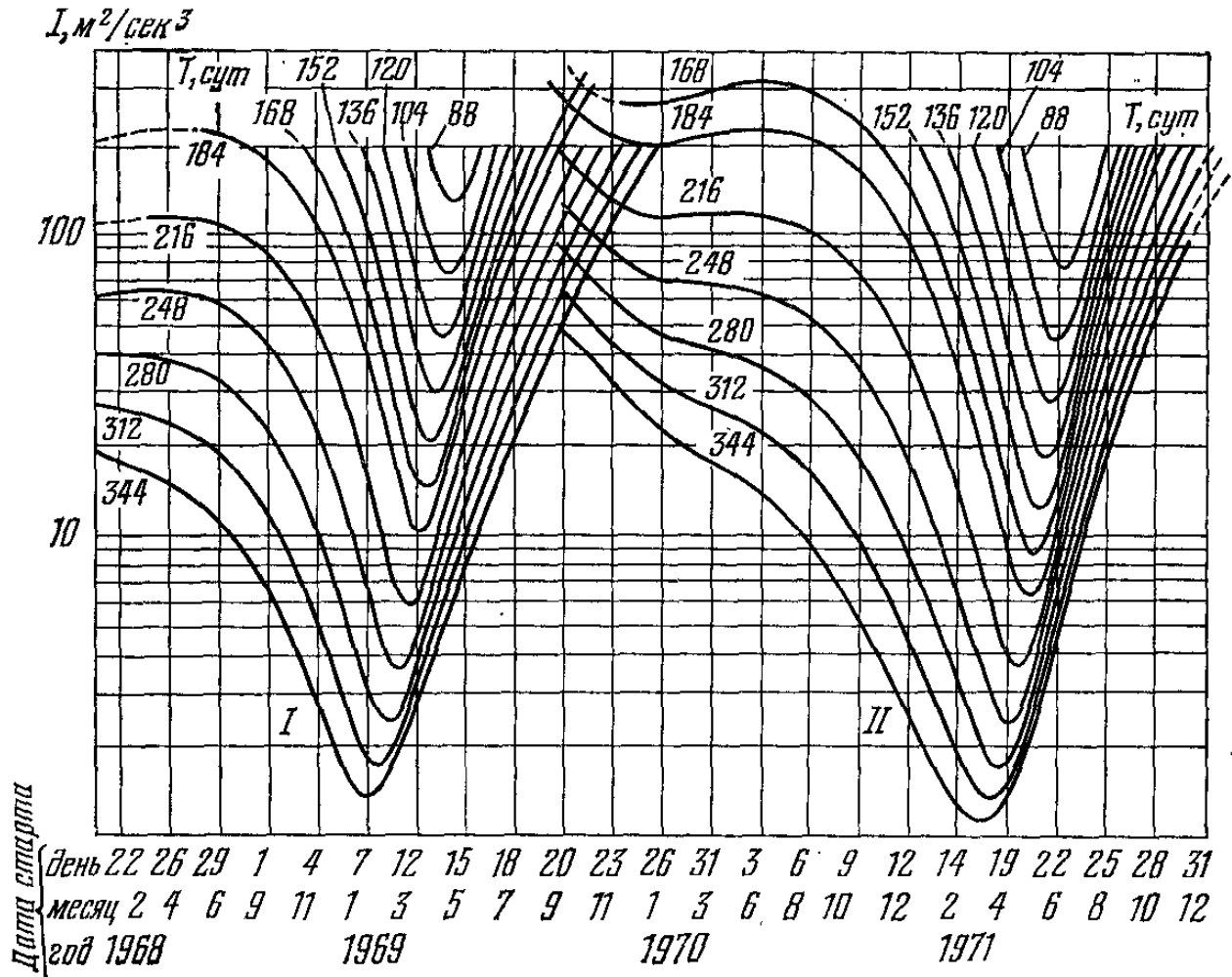


Рис 10.11. Зависимость  $I$  от даты старта и продолжительности перелета. Полет Земля — Марс.

изображена на рис. 10.11, заимствованном из работы [10.7] американских ученых Мельбуерна и Зауэра. Они численными методами решали краевую задачу для точных уравнений (10.5.1) оптимального движения. Рис. 10.11 интересен прежде всего широтой диапазона дат старта (четыре года) для рассчитанных траекторий и выявлением на этом диапазоне двух семейств траекторий. Видим, например, что оптимальные даты старта — в январе — апреле 1969 года и в марте — июле 1971 года.

Точки пересечения (в районе сентября — октября 1970 года) кривых из двух семейств, изображенных



на рис. 10.11, отвечают очень интересным траекториям, которые дают неединственное решение краевой задачи. В самом деле, в этих точках все одинаково: дата старта, продолжительность полета (а значит, и начальные и конечные значения координат и скоростей), значение интеграла  $I$ . Неодинаковы лишь управление, а значит, и траектория. Пример такого неединственного решения краевой

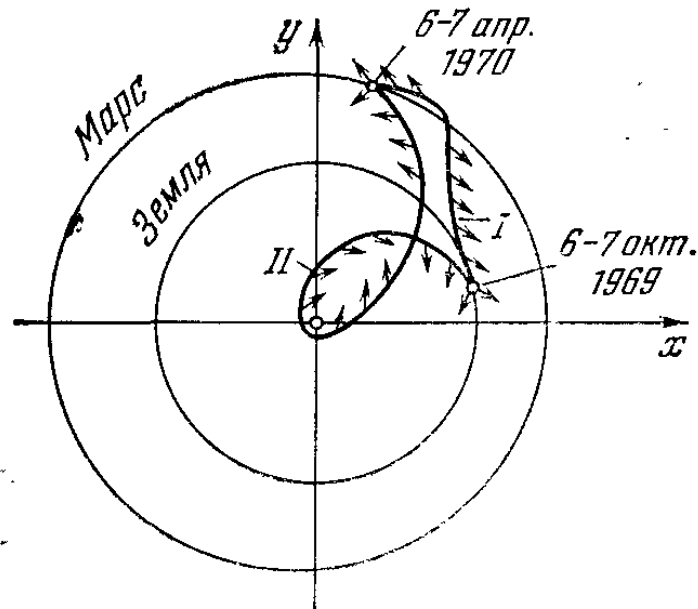


Рис. 10.12. Пример двух различных траекторий перелета Земля — Марс, совпадающих по датам старта и финиша и по расходу рабочего вещества.

задачи изображен на рис. 10.12. Время полета — 5 месяцев; но одна траектория петлеобразно огибает Солнце (угловая дальность  $\Phi = \Phi_0 + 360^\circ > 360^\circ$ , а другая — нет (угловая дальность  $\Phi_0$  невелика, меньше  $90^\circ$ ).

Условия неединственности решения краевой задачи повторяются периодически с периодом примерно 2 года 3 месяца. С таким же периодом повторяются оптимальные даты старта. Этот период характерен для любых полетов к Марсу (а не только полетов с двигателем малой тяги): примерно через такой промежуток времени (от 2 лет 34 дней до 2 лет 80 дней) повторяются взаимные положения Земли и Марса относительно Солнца.

Если мы знаем величину интеграла  $I$ , потребную для осуществления заданного полета, то по формуле (10.2.5) можно вычислить и отношение конечной массы к начальной. Для этого надо задаться величиной начальной массы  $m_0$  и мощностью двигателя  $N$ . Так как мощность двигателя ограничена и зависит от веса двигательной установки,

который в свою очередь входит в  $m_0$ , то такой весовой анализ полета представляет собой самостоятельную задачу. Об этом можно прочесть в уже упоминавшейся монографии Г. Л. Гродзовского, Ю. Н. Иванова и В. В. Токарева [10.4].

## 12. Коррекция межпланетных траекторий

На наших глазах был осуществлен целый ряд полетов автоматических межпланетных станций к Венере и Марсу. Траектории полетов этих станций были близки к кеплеровским, потому что полеты происходили с выключенными двигателями. Однако при запуске неизбежны какие-то ошибки выведения межпланетной станции на траекторию перелета, поэтому в процессе полета могут накапливаться плохо известные нам возмущения. В результате межпланетная станция летит, как правило, не совсем по той траектории, по какой надо бы, и если ее не «подправить», то можно сильно промахнуться и пролететь мимо планеты назначения. Поэтому в реально осуществляемых полетах производят такую «подправку», или, как говорят, *коррекцию*, траектории. Коррекция производится с помощью включаемого на время реактивного двигателя. Возникает масса вопросов: когда и насколько включать двигатель? Включать его один раз или несколько? Как направлять включенную реактивную тягу в пространстве? И, главное, как при этом обеспечить выполнение необходимой коррекции наиболее экономным образом? Ведь запас топлива, несомый межпланетной станцией, крайне невелик и этим запасом надо распорядиться с умом.

Если еще учесть, что ответы на поставленные вопросы зависят от реальной траектории, параметры которой измеряются с некоторыми ошибками и поэтому неизвестны точно, а включение двигателя тоже производится не буквально точно, то станет понятным, что теория коррекции межпланетных траекторий не может быть проста. Эта теория построена и продолжает развиваться трудами многих ученых.

Мы опишем здесь лишь упрощенную задачу коррекции, рассмотренную в более общей постановке А. К. Платоновым в работе [10.8]. Естественно движение по фактической траектории описывать в отклонениях от номинальной траектории при помощи уже известного нам линеаризованного векторного уравнения движения (10.6.3). Мы

это уравнение еще больше упростим, пренебрегая гравитационными возмущениями траектории, то есть членом  $A_0 \rho$ . Исследование показывает, что это вносит не очень большую ошибку в расчет, но зато позволяет просто понять качественные особенности корректирующих маневров. Тогда наши уравнения принимают вид

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad (10.12.1)$$

а задачу коррекции можно поставить так: в момент  $t = T$  окончания полета координаты  $\mathbf{r}$  и скорости  $\mathbf{v}$  должны принять номинальные значения  $\mathbf{r}_K$  и  $\mathbf{v}_K$  соответственно. При этом управление вектором  $\mathbf{f}$  должно обеспечить минимум функционала  $S$  (10.2.3). Будем считать, что  $\mathbf{f}$  ограничен по модулю, так что

$$-a \leq |\mathbf{f}| \leq +a. \quad (10.12.2)$$

Составим функцию Понтрягина для нашего случая:

$$\mathcal{H} = -|\mathbf{f}| + \Psi_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{f} + \Psi_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}, \quad (10.12.3)$$

и уравнения сопряженной системы переменных  $\Psi_{\mathbf{v}}, \Psi_{\mathbf{r}}$ :

$$\dot{\Psi}_{\mathbf{r}} = 0, \quad \dot{\Psi}_{\mathbf{v}} = -\Psi_{\mathbf{r}}. \quad (10.12.4)$$

Оптимальным будет такой закон управления, который доставляет максимум функции  $\mathcal{H}$  по управлению  $\mathbf{f}$ . Эта функция достигает максимума при

$$\left. \begin{array}{l} |\mathbf{f}| = 0, \quad \text{если } |\Psi_{\mathbf{v}}| < 1, \\ |\mathbf{f}| = a, \quad \mathbf{f} = \alpha \Psi_{\mathbf{v}}, \quad \text{если } |\Psi_{\mathbf{v}}| > 1. \end{array} \right\} \quad (10.2.5)$$

Формулы (10.12.5) (в которых  $\alpha$  — произвольная постоянная скалярная величина) дают закон оптимальной коррекции. Двигатель надо включать только тогда, когда функция  $|\Psi_{\mathbf{v}}(t)| > 1$ ; при этом величина ускорения должна быть максимальной, а его направление должно совпадать с вектором  $\Psi_{\mathbf{v}}$ . Заметим, что уравнения (10.12.4) легко интегрируются и дают явную зависимость

$$\Psi_{\mathbf{v}}(t) = -\Psi_{\mathbf{r}}^0 t + \Psi_{\mathbf{v}}^0, \quad (10.12.6)$$

откуда

$$\begin{aligned} |\Psi_{\mathbf{v}}(t)| &= \sqrt{m^2 t^2 + 2nt + k^2}, \quad (10.12.7) \\ m^2 &= |\Psi_{\mathbf{r}}^0|^2, \quad n = -\Psi_{\mathbf{r}}^0 \cdot \Psi_{\mathbf{v}}^0, \quad k^2 = |\Psi_{\mathbf{v}}^0|^2. \end{aligned}$$

По характеру зависимости (10.12.7) сразу ясно, что величина  $|\Psi_{\mathbf{v}}(t)|$  на замкнутом интервале  $[t_0, T]$  времени

полета может превзойти единицу ( $|\Psi^v| > 1$ ) не более чем на двух участках, причем один из них находится в начале, а другой — в конце полетного интервала. Итак, мы уже получили любопытный вывод: при нашей постановке задачи оказалось, что оптимальная коррекция *содержит не более двух активных участков, причем один из них начинается в момент  $t_0$  начала полета, а другой кончается в момент  $T$  окончания полета.*

При благоприятных условиях один из этих участков может исчезнуть, а при неблагоприятных (очень большие начальные отклонения от номинальной траектории) оба участка сливаются и вся траектория проходит с непрерывно работающим двигателем.

Отметим еще, что в силу (10.12.5) и (10.12.6) компоненты реактивного ускорения включенного двигателя в оптимальном управлении линейно меняются со временем. Конкретный закон управления реактивным ускорением определяется выражением векторов  $\Psi^0_r$ ,  $\Psi^0_v$  через крайевые условия  $r_0$ ,  $r_k$ ,  $v_0$ ,  $v_k$  нашей задачи.

Обзор работ по коррекции траекторий можно найти в [10.91].

## ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ОРБИТАЛЬНЫХ ТЕЛ

Он умер, да! Но он не мог упасть,  
Войдя в круги планетного движенья.  
Бездонная внизу зияла пасть,  
Но были слабы силы притяженья.

Лучами был пронизан небосвод,  
Божественно-холодными лучами.  
Не зная тленья, он летел вперед,  
Смотрел на звезды мертвыми очами.

*Н. Гумилев*  
«Орел»

### 1. На орбитах — два спутника

Каждый из них движется вокруг Земли. Мы знаем, как. Но как спутники движутся относительно друг друга? Это относительное движение необходимо, например, знать при решении задачи о стыковке двух спутников.

Два спутника соединены тросом. Как это повлияет на относительное движение спутников?

Космонавт отделился от корабля-спутника. Он соединен со спутником тросом (фалом). Этот фал — не простая «перестраховка», а совершенно необходимая мера. Иначе, в силу законов небесной механики, космонавт неизбежно отстанет от спутника. Или обгонит его, что безразлично для последствий (см. эпиграф). А как будет двигаться относительно спутника космонавт, привязанный фалом?

Все перечисленные вопросы (и многие другие, им подобные) входят в класс задач об относительном движении космических объектов — будь то спутники, космонавты или секции орбитальных станций, нежестко связанные друг с другом.

Мы начнем анализ относительного движения со случая свободного движения двух материальных точек относительно друг друга. Если угодно, можно считать, что одна из этих материальных точек — спутник, другая — космонавт. Пока фал, соединяющий космонавта и спутник, не натянут до отказа, движение космонавта можно считать свободным. При натяжении фала на спутник действует

реакция связи. Такая же, но противоположно направленная сила действует на космонавта.

Рассмотрим сначала постановку задачи о движении по орбитам двух материальных точек, связанных тросом, а уже потом перейдем к анализу свободного движения точек. Анализ движения связки двух тел (системы двух материальных точек, соединенных гибкой невесомой нерастяжимой нитью) проведен в работах В. В. Белецкого и Е. Т. Новиковой [11.1, 11.2].

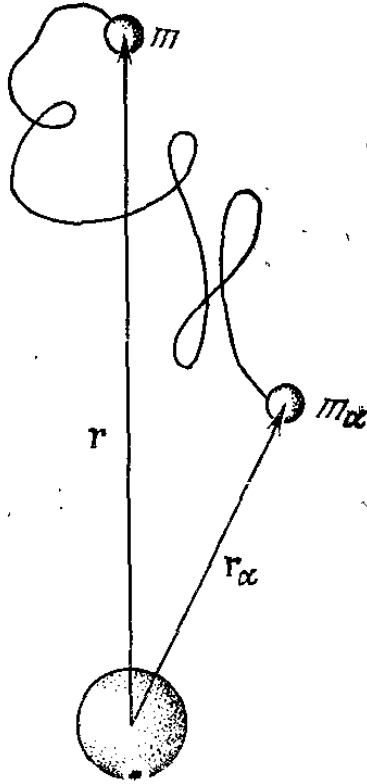


Рис. 11.1. Связка двух тел на орбите.

Следуя работе [11.1], обозначим через  $m_\alpha$ ,  $m$  массы материальных точек,  $r_\alpha$ ,  $r$  — их геоцентрические радиусы-векторы. Пусть точки соединены невесомой нерастяжимой гибкой нитью длины  $l$  (рис. 11.1). Тогда во время движения должно быть выполнено условие связи

$$|r - r_\alpha| \leq l. \quad (11.1.1)$$

Иначе говоря, расстояние между точками не может превысить длину нити. Векторы уравнения движения могут быть тогда записаны в виде уравнений Лагранжа первого рода.

Поясним, что это такое. Пусть на систему  $n$  материальных точек с координатами  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  наложены идеальные освобождающие связи

$$f_j(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) \leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (a)$$

Уравнения движения

$$\left. \begin{aligned} m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} &= X_\nu + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_\nu}, \\ m_\nu \frac{d^2 y_\nu}{dt^2} &= Y_\nu + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_\nu}, \\ m_\nu \frac{d^2 z_\nu}{dt^2} &= Z_\nu + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

называются уравнениями Лагранжа первого рода и описы-

вают движение системы материальных точек с массами  $m_v$ , на каждую из которых действует сила с компонентами  $X_v, Y_v, Z_v$ , и на точки системы наложены указанные связи. При этом множитель Лагранжа  $\lambda_j$  не равен нулю только в том случае, если связь  $f_j$  «натянута» (знак строгого равенства); тогда обязательно  $\lambda_j < 0$ . Если же связь  $f_j$  не «натянута» (знак строгого неравенства), то соответствующий множитель Лагранжа  $\lambda_j = 0$ . Уравнения движения (их  $3n$ ) вместе с  $m$  уравнениями условий связанного движения определяют  $3n + m$  неизвестных величин:  $3n$  координат  $x_v, y_v, z_v$  и  $m$  множителей Лагранжа  $\lambda_j$ .

Для задачи, рассматриваемой здесь, уравнения Лагранжа первого рода (в векторной форме) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}} + \frac{m\mu\mathbf{r}}{r^3} &= -2\lambda(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha), \\ m_\alpha\ddot{\mathbf{r}}_\alpha + \frac{m_\alpha\mu\mathbf{r}_\alpha}{r_\alpha^3} &= 2\lambda(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha). \end{aligned} \right\} \quad (11.1.2)$$

В уравнениях (11.1.2) учтены силы ньютоновского притяжения каждой точки к центру Земли. Правые части этих уравнений представляют собой реакцию связи. Множитель  $\lambda$  еще подлежит определению.

Если движение свободно, то в (11.1.1) стоит строгий знак неравенства, и тогда полагают в (11.1.2)  $\lambda \equiv 0$ . Если движение связанное, то в (11.1.1) стоит строгий знак равенства и  $\lambda \neq 0$  в (11.1.2).

Нас интересует относительное движение точек  $m$  и  $m_\alpha$ . Будем рассматривать их движение относительно их общего центра масс. Естественно, тогда нужно знать движение этого центра масс. Он, вообще говоря, не будет двигаться по кеплеровской орбите. Это можно понять на следующем простом «мысленном эксперименте».

Пусть две несвязанные материальные точки одинаковой массы начинают движение из одной точки пространства: по круговой орбите одна и по очень близкой эллиптической соприкасающейся орбите другая. В силу весьма малой разницы в периодах обращения через некоторое, достаточно большое количество оборотов материальные точки будут находиться почти на одинаковом расстоянии от центра тяготения, но угловое расстояние между их радиусами-векторами будет близко к  $180^\circ$ . В этот момент, очевидно, центр масс системы будет почти совпадать с центром тяготения, в то время как в начальный момент

он находился в точке касания двух рассматриваемых орбит. При этом радиус-вектор центра масс системы не только существенно изменился по модулю, но и, как легко понять, описал достаточно много оборотов вокруг центра притяжения. Значит, на рассмотренном интервале времени траектория центра масс носит спиральный характер (конечно, с локальными модуляциями вдоль спирали). На бесконечном интервале времени получится траектория типа пульсирующей спирали, так что модуль радиуса-вектора центра масс будет то уменьшаться до весьма малой величины, то увеличиваться до размера, близкого к первоначальному.

Однако в рассматриваемой задаче анализ существенно упрощается следующим путем. Сделаем естественное предположение о том, что  $l$  — максимально возможное расстояние между точками — всегда мало по сравнению с расстояниями  $r, r_\alpha$  от точек до центра притяжения, то есть  $l/r \ll 1, l/r_\alpha \ll 1$ . Тогда с высокой точностью можно считать, что центр системы движется по кеплеровской орбите. Покажем это. Обозначим радиус-вектор центра масс через  $\mathbf{R}$ . Тогда

$$\mathbf{R} = \frac{m\mathbf{r} + m_\alpha\mathbf{r}_\alpha}{m + m_\alpha}. \quad (11.1.3)$$

Из (11.1.2) получим, обозначив  $m + m_\alpha = M$ ,

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{\mathbf{R}} + \mu \left( \frac{m\mathbf{r}}{r^3} + \frac{m_\alpha\mathbf{r}_\alpha}{r_\alpha^3} \right) &= 0, \\ \mathbf{r} &= \mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}, \quad \mathbf{r}_\alpha = \mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}_\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (11.1.4)$$

Здесь  $\boldsymbol{\rho}$  и  $\boldsymbol{\rho}_\alpha$  — радиусы-векторы точек  $m$  и  $m_\alpha$ , проведенные из их общего центра масс. Так как  $\rho \leq l, \rho_\alpha \leq l$ , то  $\rho \ll r, \rho_\alpha \ll r_\alpha$ ; поэтому  $r \approx r_\alpha \approx R$  и

$$\frac{\rho}{R} \ll 1, \quad \frac{\rho_\alpha}{R} \ll 1. \quad (11.1.5)$$

Разложим в (11.1.4) выражение, стоящее в скобках, по степеням малых величин (11.1.5) и сохраним лишь члены до второго порядка малости включительно. Тогда вместо (11.1.4) получим уравнение

$$M\ddot{\mathbf{R}} + \frac{\mu M}{R^3} \mathbf{R} = \mathbf{F}, \quad (11.1.6)$$



где

$$\left. \begin{aligned}
 & \mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2, \\
 & \mathbf{F}_1 = -\frac{3\mu}{R^5} \left\{ \mathbf{R} \cdot (m\boldsymbol{\rho} + m_\alpha\boldsymbol{\rho}_\alpha) \right\} \mathbf{R} + \frac{3\mu}{R^3} (m\boldsymbol{\rho} + m_\alpha\boldsymbol{\rho}_\alpha), \\
 & \mathbf{F}_2 = \frac{3}{2} \frac{\mu}{R^3} \left\{ m \left[ \left( \frac{\boldsymbol{\rho}}{R} \right)^2 - 5 \left( \frac{\mathbf{R}}{R} \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}}{R} \right)^2 \right] + \right. \\
 & \quad \left. + m_\alpha \left[ \left( \frac{\boldsymbol{\rho}_\alpha}{R} \right)^2 - 5 \left( \frac{\mathbf{R}}{R} \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}_\alpha}{R} \right)^2 \right] \right\} \mathbf{R} + \\
 & \quad + \frac{3\mu m}{R^5} (\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) \cdot \boldsymbol{\rho} + \frac{3\mu m_\alpha}{R^5} (\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}_\alpha) \cdot \boldsymbol{\rho}_\alpha.
 \end{aligned} \right\} \quad (11.1.7)$$

В силу определений (11.1.3) и (11.1.4) получим

$$\left. \begin{aligned}
 \boldsymbol{\rho}_\alpha &= \frac{m}{m+m_\alpha} (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}), \\
 \boldsymbol{\rho} &= \frac{m_\alpha}{m+m_\alpha} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha),
 \end{aligned} \right\} \quad (11.1.8)$$

$$m_\alpha \boldsymbol{\rho}_\alpha + m \boldsymbol{\rho} = 0. \quad (11.1.9)$$

Если бы в уравнении (11.1.6) не было возмущающей силы  $\mathbf{F}$ , то из этого уравнения для  $\mathbf{R}(t)$  получили бы кеплеровское движение. Наличие  $\mathbf{F}$  «портит» кеплеровскую орбиту. Но вследствие (11.1.9) видим, что в возмущающей силе  $\mathbf{F}$  (11.1.7) члены первого порядка малости тождественно равны нулю:  $\mathbf{F}_1 \equiv 0$ . Значит, главный член в  $\mathbf{F}$  имеет второй порядок малости относительно величин (11.1.5) (он дается формулой (11.1.7) для  $\mathbf{F}_2$ ). Следовательно,  $|\mathbf{F}|$  чрезвычайно мала по сравнению с основным членом  $\left| \frac{\mu M}{R^3} \mathbf{R} \right| = \frac{\mu M}{R^2}$  в уравнении (11.1.6). И с высокой степенью точности (до эффектов второго порядка малости) можно принять, что

$$\ddot{\mathbf{R}} + \frac{\mu}{R^3} \mathbf{R} = 0, \quad (11.1.10)$$

то есть центр масс системы движется по кеплеровской орбите.

## 2. Уравнения относительного движения

Мы пришли, таким образом, к обычно употребляемой ограниченной постановке задачи: исследовать движение системы относительно ее центра масс, который движется по заданной кеплеровской орбите.

Так как в силу (11.1.8)

$$\rho = -\frac{m_\alpha}{m} \rho_\alpha, \quad (11.2.1)$$

то достаточно рассмотреть движение только одной точки, например точки  $m_\alpha$  (космонавт); движение второй точки (спутник) определяется тогда из (11.2.1). Заметим, что если  $m_\alpha/m \ll 1$  (масса космонавта существенно меньше массы спутника), то получим (в пределе при  $m_\alpha \rightarrow 0$ )  $|\rho| \sim 0$ , так что движение точки  $m_\alpha$  относительно центра масс системы  $(m_\alpha, m)$  почти совпадает с движением точки  $m_\alpha$  относительно точки  $m$ .

Поскольку на движение наложено ограничение (11.1.5), действующее на всем бесконечном интервале времени из-за наложения связи (11.1.1), то при изучении относительного движения естественно рассматривать лишь уравнения в малых отклонениях от центра масс системы.

С этой целью линеаризируем уравнения (11.1.2) относительно  $\rho$  и  $\rho_\alpha$ . Процесс линеаризации удобно провести так. Поделив первое уравнение (11.1.2) на  $m$ , второе на  $m_\alpha$  и вычитая одно из другого, получим

$$\left. \begin{aligned} \Delta \ddot{\mathbf{r}} + \mu \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} - \frac{\mathbf{r}_\alpha}{r_\alpha^3} \right) + 2\lambda \Delta \mathbf{r} \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{m_\alpha} \right) = 0, \\ \Delta \mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha. \end{aligned} \right\} (11.2.2)$$

Линеаризация этого уравнения относительно  $\Delta \mathbf{r}$  с учетом соотношения  $\Delta \mathbf{r} = -\frac{m+m_\alpha}{m} \rho_\alpha$ , получаемого из (11.1.8), дает

$$\ddot{\rho}_\alpha + \frac{\mu}{R^3} \rho_\alpha - \frac{3\mu}{R^5} \mathbf{R}(\mathbf{R}, \rho_\alpha) = \tilde{\lambda}_\alpha \rho_\alpha, \quad (11.2.3)$$

где  $\tilde{\lambda}_\alpha = -2\lambda \frac{m_\alpha + m}{m m_\alpha}$  — новый, подлежащий определению множитель. Теперь вместо (11.1.1) связь будет определяться неравенством

$$\rho_\alpha \leq \frac{m}{m+m_\alpha} l \quad (11.2.4)$$

и в связанном движении в (11.2.3) должно быть  $\tilde{\lambda}_\alpha < 0$ .

Векторное уравнение (11.2.3) вместе с (11.2.4) и определяет движение точки массы  $m_\alpha$  (космонавта) относительно центра масс системы точек  $m$  и  $m_\alpha$  (спутник — космонавт). В уравнении (11.2.3)  $\mathbf{R}(t)$  — известная функция времени, определяющая кеплеровскую траекторию цент-

ра инерции системы. Само уравнение (11.2.3) есть частный случай уже известных нам линейных уравнений [11.2], описывающих движение в транспортирующей системе координат (см. очерк десятый).

Рассмотрим теперь свободное движение материальной точки  $m_\alpha$  относительно центра масс системы точек  $m, m_\alpha$ . В этом случае в (11.2.3) следует положить  $\tilde{\lambda}_\alpha \equiv 0$ . Это значит, что возникла такая ситуация. От корабля-спутника отделился космонавт. Он не соединен со спутником фалом и не имеет индивидуального реактивного двигателя. Какова дальнейшая судьба космонавта?

### 3. Свободное движение космонавта относительно спутника

Для простоты анализа будем считать орбиту центра масс системы круговой, а движение космонавта происходящим в плоскости этой орбиты. Ввиду того, что масса космонавта намного меньше массы корабля, в дальнейшем не будем отличать центр масс корабля от центра масс системы корабль — космонавт. Пусть с центром масс  $O$  спутника связана система координат  $\eta, \xi, \zeta$ , оси которой направлены все время по радиусу-вектору орбиты спутника  $\eta$ , по трансверсали  $\xi$  и по нормали к плоскости орбиты  $\zeta$ . Для круговой орбиты спутника в случае плоского движения космонавта текущие координаты  $\eta, \xi$  космонавта удовлетворяют уравнениям

$$\eta'' - 2\xi' - 3\eta = 0, \quad \xi' + 2\eta' = 0. \quad (11.3.1)$$

Эти уравнения как частный случай легко получаются из векторного уравнения (11.2.3). Штрихи в (11.3.1) означают производные по безразмерному времени  $\tau = \omega_0 t$ , где  $\omega_0$  — угловая скорость движения центра масс спутника по орбите. Уравнения (11.3.1) описывают движение космонавта только до тех пор, пока фал не натянут. Такое движение назовем свободным. Рассмотрим его. Уравнения (11.3.1) легко интегрируются. Решение такое:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= 2c_1 + c_2 \sin \tau + c_3 \cos \tau, \\ \xi &= c_4 - 3c_1\tau + 2c_2 \cos \tau - 2c_3 \sin \tau, \end{aligned} \right\} \quad (11.3.2)$$

где произвольные постоянные  $c_1, c_2, c_3, c_4$  выражаются через начальные (при  $\tau = 0$ ) данные задачи следующим

образом:

$$c_1 = 2\eta_0 + \xi'_0, \quad c_2 = \eta'_0, \quad c_3 = -3\eta_0 - 2\xi'_0, \quad c_4 = \xi_0 - 2\eta'_0. \quad (11.3.3)$$

Чтобы лучше представить вид траектории, описываемой космонавтом, заметим, что координаты  $\eta(\tau)$ ,  $\xi(\tau)$  и время  $\tau$  связаны соотношением (его легко получить из (11.3.2))

$$\frac{(\eta - 2c_1)^2}{c_2^2 + c_3^2} + \frac{[\xi - (c_4 - 3c_1\tau)]^2}{4(c_2^2 + c_3^2)} = 1. \quad (11.3.4)$$

Здесь предполагается, что хотя бы одно из  $c_2, c_3$  отлично от нуля. В противном случае, как видно из (11.3.2), космонавт будет равномерно удаляться от спутника вдоль оси  $\xi$ , то есть параллельно касательной к орбите (рис. 11.2). Здесь уместно напомнить о приближенности наших линейных уравнений (11.3.1). Строго говоря, и космонавт и спутник летят по каким-то близким эллиптическим орбитам, а уравнения (11.3.1) описывают относительное движение лишь в малой окрестности спутника, то есть пока расстояние между космонавтом и спутником мало по сравнению с размерами орбиты спутника.

Из (11.3.3) видно, что равномерное свободное удаление возможно лишь при отсутствии начальной скорости, направленной вдоль радиуса-вектора спутника (необходимое, но недостаточное условие; надо еще, чтобы  $c_3 = 0$ ).

Возвращаясь к общей формуле (11.3.4), рассмотрим сначала случай периодических движений космонавта. Из (11.3.2) и (11.3.4) видно, что такие движения имеют место лишь при  $c_1 \equiv 0$ . Период этих движений совпадает с периодом обращения спутника по орбите, а сами движения происходят по эллипсу, центр которого лежит в точке  $\eta^* = 0$ ,  $\xi^* = c_4$ , малая полуось направлена параллельно оси  $\eta$  и равна  $\sqrt{c_2^2 + c_3^2}$ , а большая полуось в два раза больше по величине (рис. 11.3). В частности, возможно и «зависание» космонавта в точке  $\eta = 0$ ,  $\xi = \xi_0$ , если в начальный момент он находился в этой точке и не имел скорости относительно спутника. В этом случае космонавт движется вокруг Земли по той же орбите, что и спутник (но находится в другой точке орбиты). Важно отметить, что и такое «зависание», и вообще периодические движения относительно спутника неустойчивы. Достаточно лишь изменить начальные данные так, чтобы

$c_1 \neq 0$  (пусть даже  $|c_1|$  сколь угодно мало), как периодичность разрушается и получается более общий случай движения.

В этом случае равномерное движение (рис. 11.2) и периодическое движение (рис. 11.3) складываются и получается движение по траектории, изображенной на рис. 11.4. Из (11.3.4) видно, что это движение представимо

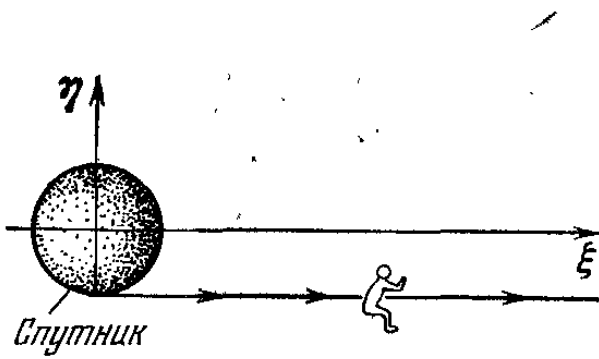


Рис. 11.2. Равномерное удаление космонавта от спутника.

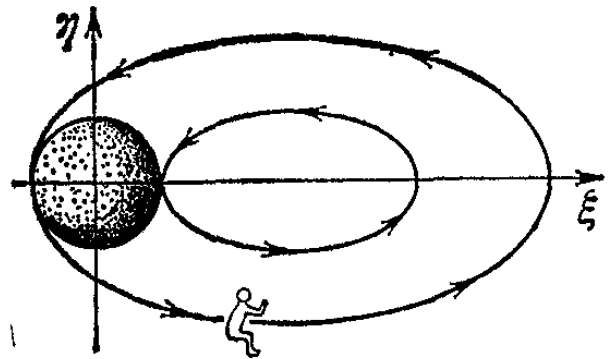


Рис. 11.3. Периодическое движение космонавта.

движением по эллипсу с полуосями  $\sqrt{c_2^2 + c_3^2}$  и  $2\sqrt{c_2^2 + c_3^2}$ , вытянутому вдоль оси  $\xi$ , причем координата  $\eta^*$  центра

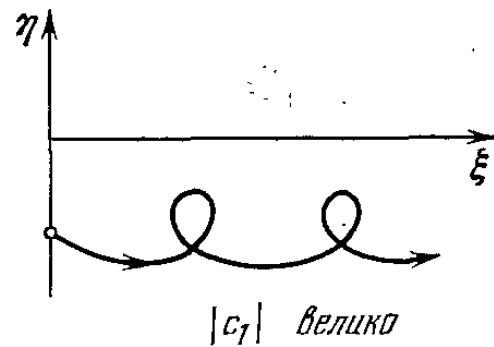
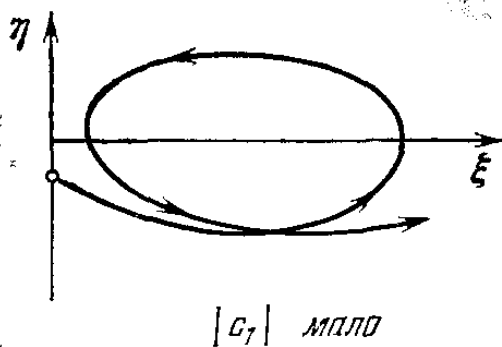


Рис. 11.4. Схема свободного движения космонавта относительно спутника в общем случае.

эллипса остается неизменной:  $\eta^* = 2c_1$ , однако вторая координата  $\xi^*$  центра эллипса равномерно движется вдоль оси  $\xi$ :  $\xi = c_4 - 3c_1\tau$ . Таким образом, одновременно с прохождением космонавтом некоторой дуги эллипса этот эллипс успевает сместиться вдоль оси  $\xi$  на некоторую величину.

Итак, только в исключительных случаях космонавт, не привязанный к спутнику, может вновь вернуться на спутник. В общем же случае космонавт, однажды покинув корабль-спутник, не сможет вернуться никогда. Сначала космонавт будет находиться вблизи спутника,

но, понемногу удаляясь, будет все больше отставать от корабля (или обгонять его). Через половину витка полета спутника космонавт даже начнет сближаться с кораблем и может подойти к нему довольно близко. Но вспыхнувшая искра надежды быстро погаснет: коварная траектория относительного движения заставит космонавта описать пируэт и вновь удалиться от родного корабля...

Дальнейшая судьба космонавта была бы ужасна. Он обречен нескончаемо долго кружиться вокруг Земли по собственной орбите, потеряв из виду покинутый корабль. Через много-много витков космонавт может снова сближаться с кораблем, но поздно...

Нет, давайте привяжем космонавта фалом, хорошей, доброй, надежной веревкой!

#### 4. Леонов и заглушка

Предыдущий анализ относительного движения применим не только к исследованию свободного движения космонавта относительно спутника, но и к анализу свободного движения любого предмета относительно любого тела, движущегося по орбите. Например, можно проследить движение относительно космонавта любого предмета, брошенного (или потерянного) космонавтом.

Такая ситуация возникла, например, при выходе в открытый космос А. Леонова. Вот кусок репортажа П. Беляева и А. Леонова об их полете [11.4]:

«...Он отвинтил заглушку с киноаппарата, укрепленного снаружи корабля. Куда деть ее? Может запустить на орбиту? И космонавт, размахнувшись, швырнул ее в сторону Земли. Небольшой предмет, поблескивая на Солнце, стал быстро удаляться и вскоре исчез из глаз».

Поучительно разобрать, что произошло с заглушкой. Размышления над этим вопросом неизбежно проходят через несколько этапов.

Первый этап — бездумный: привыкнув мыслить земными категориями, мы не нашли бы ничего удивительного в том, что брошенный на Землю предмет будет падать именно на Землю.

Второй этап — задумчивый: мы вспоминаем, что космонавт летит над Землей с огромной скоростью, около 8000 м/сек! С какой скоростью бросил Леонов заглушку к Земле? Довольно сильный бросок человеческой рукой сообщает легкому камню скорость 15—20 м/сек. Примем

для определенности начальную скорость заглушки относительно Леонова равной  $10 \text{ м/сек}$ . При рассмотрении движения заглушки относительно Земли мы должны геометрически сложить скорость космонавта относительно Земли и скорость заглушки относительно космонавта (рис. 11.5). Видим, что результирующая скорость заглушки по величине и направлению изменится ничтожно мало!

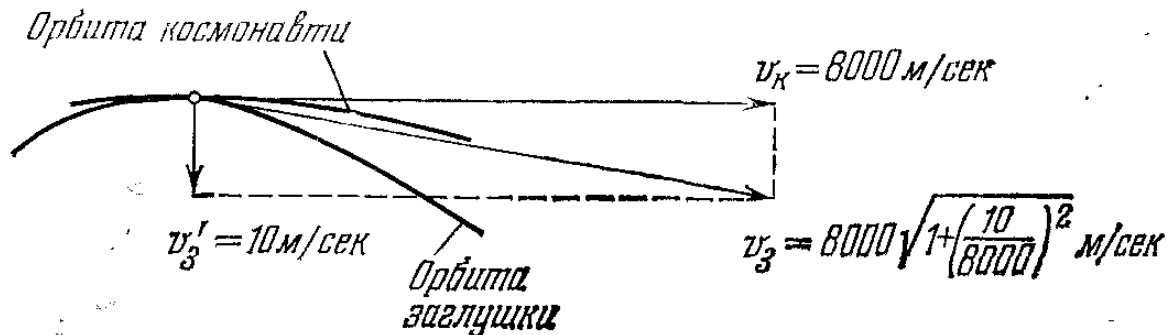


Рис. 11.5. К задаче о движении заглушки.

Это значит, что заглушка просто перешла на другую эллиптическую орбиту относительно Земли, весьма близкую к орбите космонавта. Согласуется ли это с утверждением о быстром удалении заглушки, брошенной в сторону Земли?

Здесь наступает третий этап размышлений — исследовательский. Мы резонно вспоминаем, что в репортаже речь идет не о том, как движется заглушка относительно Земли, а о том, как видел это движение Леонов! Иначе говоря, нужно рассмотреть движение заглушки относительно Леонова. Что же, мы к этому готовы. Обратимся к уравнениям (11.3.2) траектории относительного движения. Так как заглушка была брошена прямо по направлению к Земле, то можно считать начальные данные такими:  $\eta_0 = \xi_0 = 0$ ,  $\xi'_0 = 0$ ,  $\eta'_0 \neq 0$ . Тогда, как видно из (11.3.3),  $c_1 = c_3 = 0$ ,  $c_2 = \eta'_0$ ,  $c_4 = -2\eta'_0$ . Подставляя эти значения постоянных в (11.3.2) или в (11.3.4), обнаружим, что заглушка опишет периодическую траекторию относительно Леонова! На рис. 11.6 изображена эта траектория.

Если бы Леонов находился в свободном полете целый виток орбиты, то он бы дождался возвращения заглушки прямо в руки, но с противоположной относительно Земли стороны. (Здесь, конечно, не учитываются второстепенные факторы — отличие броска от рассмотренного, различные возмущения, по-разному влияющие на космонавта

и заглушку в их полете, и т. п.) Взглянув на рисунок, изображающий траекторию заглушки относительно космонавта, мы задаемся вопросом: мог ли Леонов видеть заглушку, быстро удаляющуюся по направлению к Земле?

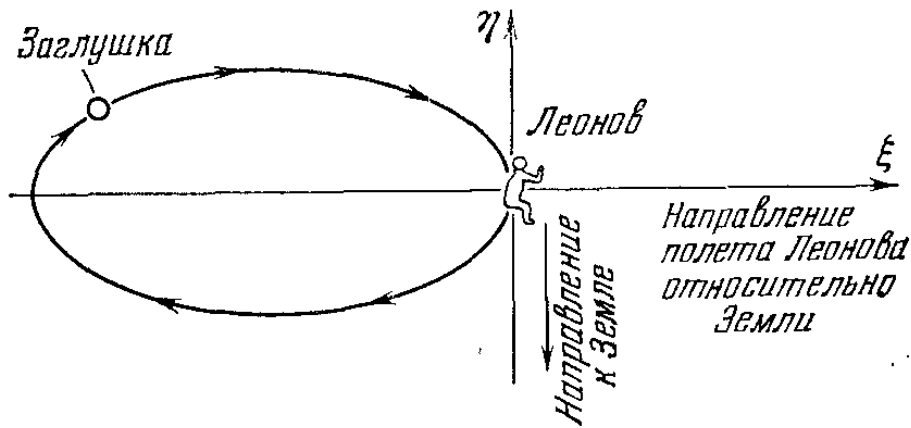


Рис. 11.6. Периодическая траектория заглушки.

Здесь наступает четвертый этап размышлений — этап расчетный. Параметрическое уравнение траектории в рассматриваемом случае дается формулами

$$\eta = \eta'_0 \sin \tau, \quad \xi = 2\eta'_0 (\cos \tau - 1) = -4\eta'_0 \sin^2 \tau/2. \quad (11.4.1)$$

При этом  $\eta'_0 = v/V \approx 10 \text{ м/сек} : 8000 \text{ м/сек} = 0,125 \cdot 10^{-2}$ . Здесь  $v$  — начальная скорость брошенной заглушки относительно космонавта,  $V$  — скорость космонавта относительно Земли. Пусть Леонов наблюдал за заглушкой в течение полутора минут ( $t = 1,5$  минуты). Тогда  $\tau = \omega t = 2\pi \frac{t}{T} = 2\pi \frac{1,5}{90}$ , где  $T = 90$  минут — период обращения по той орбите, на которой находился Леонов. В градусной мере получим  $\tau = \frac{360 \cdot 1,5}{90} = 6^\circ$ . Подставляя в формуле (11.4.1) числовые значения  $\eta'_0$  и  $\tau$ , вычислим координаты заглушки по отношению к космонавту:  $\eta = 0,131 \cdot 10^{-3}$ ,  $\xi = -0,0137 \cdot 10^{-3}$ . Чтобы перейти к размерным величинам, надо эти числа умножить на расстояние от центра Земли до космонавта. Примем это расстояние равным  $R = 6600 \text{ км}$ . Тогда  $\tilde{\eta} = \eta R \approx 865 \text{ м}$ ,  $\xi = \eta R \approx -90 \text{ м}$ . Но координата  $\eta$  соответствует смещению заглушки к Земле, а координата  $\xi$  — в сторону от Земли.

Вряд ли можно проследить простым глазом полет маленького тела — заглушки на расстояние почти 1 км.



Если же это удалось, то трудно заметить смещение заглушки в сторону от радиального направления, так как это смещение составляет всего (примерно) одну десятую часть от пройденного пути. Если же считать, что Леонов потерял заглушку из виду раньше (а это гораздо вероятнее), то доля поперечного смещения заглушки по отношению к полному пути, пройденному ею, будет еще меньше. Отсюда вывод: пока видит глаз, заглушка кажется летящей по направлению к Земле. Бросив заглушку в сторону Земли, Леонов должен был наблюдать травиальное ее падение на Землю!

## 5. Космический зонд

Свободное движение одного тела относительно другого мы рассматривали, предполагая малость расстояния между телами. Это позволяло ограничиться в анализе линеаризованными уравнениями.

Однако существуют задачи, где относительное движение тел надо рассматривать и на больших их расстояниях друг от друга. Такова, например, задача о зондировании околосолнечного пространства. Представим себе, что с Земли запущен космический аппарат, который должен глубоко проникнуть в космос и после нескольких месяцев (или лет) полета вернуться снова на Землю. Во время полета этот аппарат — автоматическая научная станция («космический зонд») — собирает и накапливает информацию о космическом пространстве и затем сам доставляет эту информацию на Землю. Можно ли осуществить такую траекторию полета космического зонда? Очевидно, можно. Если зонд движется вокруг Солнца по эллиптической орбите с периодом, соизмеримым с периодом обращения Земли вокруг Солнца, то зонд и Земля, естественно, будут периодически встречаться. Например, если период обращения зонда 1,5 года, то через три года он вернется на Землю. Интересно и нужно проследить движение зонда не относительно Солнца, а относительно Земли.

В работе [11.5] В. А. Егоров рассмотрел такую задачу. На рис. 11.7 и 11.8, заимствованных из [11.5], приведены траектории космического зонда во вращающейся вместе с Землей системе координат (рис. 11.7) и те же траектории в абсолютной системе координат (рис. 11.8). Одна из этих траекторий имеет в движении относительно Солнца период

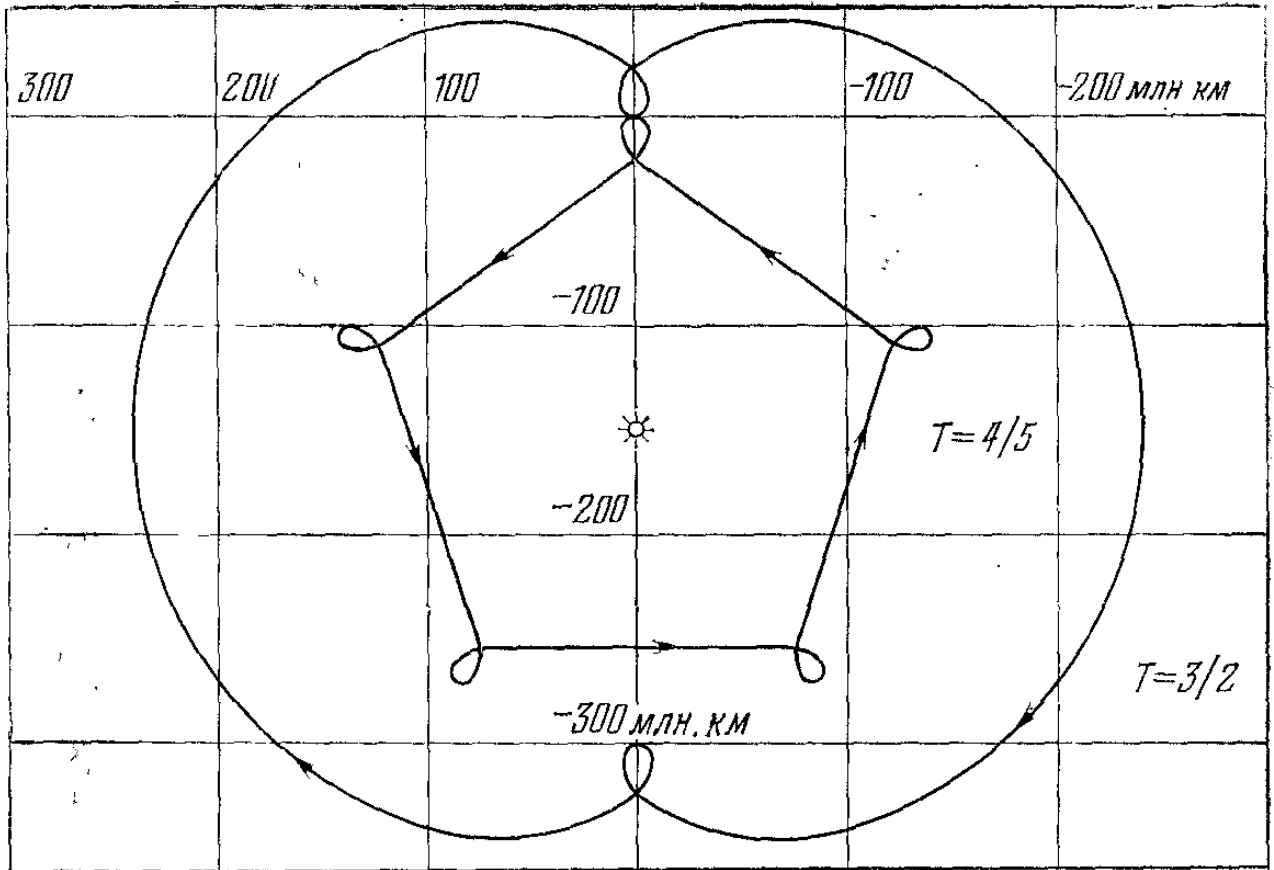


Рис. 11.7. Две траектории космического зонда относительно Земли.

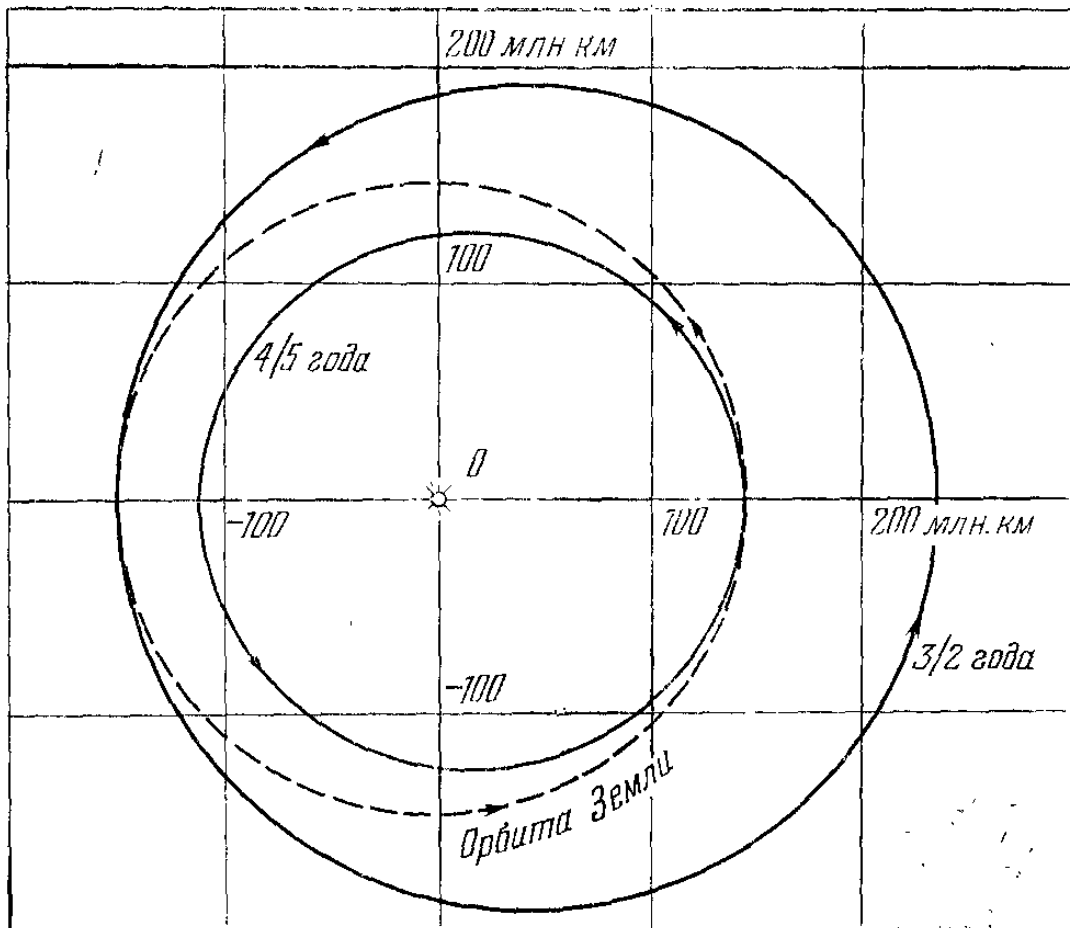


Рис. 11.8. Две траектории космического зонда относительно Солнца.

$\frac{4}{5}$  года и подходит к Солнцу на минимальное расстояние 108 млн. км. (максимальное расстояние, очевидно, совпадает с радиусом орбиты Земли и равно 149 млн. км). Между двумя встречами зонда с Землей проходит четыре года; зонд за это время сделает пять оборотов вокруг Солнца. Другая траектория имеет период (в движении вокруг Солнца) полтора года, и зонд встретится с Землей через три года. Минимальное расстояние зонда от Солнца 149 млн. км, максимальное — 242 млн. км.

Для различных задач зондирования пространства могут пригодиться траектории и с периодами другой кратности ( $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{2}{3}$  года или 2, 3, . . . года и т. д.).

Вернемся, однако, к нашей задаче об относительном движении одной точки вблизи другой.

## 6. Болеадорас в космосе

Займемся, наконец, динамикой заброшенной на орбиту связки двух тел [11.1, 11.2]. Эта конструкция из двух масс, соединенных «идеальной» веревкой (рис. 11.1), напоминает аргентинское «болеадорас». В аргентинской пампе с помощью болеадорас отлавливают полуодичавший скот; несколько более необычное применение болеадорас красочно описано Дж. Дареллом.

*«У всех неонов теперь были в руках болеадорас, и я видел, как блестели шары на концах веревок, когда они раскручивали их над головами. Нанду повернули всей стаей и побежали в нашу сторону... Тонкий свист болеадорас внезапно усилился и замер на протяжном гудящем звуке. Веревка с шарами пролетела по воздуху и оплелась вокруг шеи и ног птицы подобно щупальцам спрута. Нанду пробежал еще пару шагов, веревка затянулась, и он упал на землю, дергая ногами и крыльями». (Дж. Дарелл. «Под пологом пьяного леса».)*

Мы в дальнейшем будем говорить о космонавте и спутнике, соединенных фалом; однако не надо забывать, что наша идеализированная схема равным образом годится и для описания движения других орбитальных систем, например двухсекционного спутника, секции которого соединены тросом.



Все сказанное ранее о движении космонавта относилось к свободному его движению. Проведенный анализ показывает, что в общем случае космонавт неизбежно удаляется от спутника (ведь вероятность попасть на периодическую траекторию мала) и в какой-то момент времени удалится на полную длину фала (обозначим эту длину  $l$ ). С этого момента и начинается самое интересное. Дальнейшая судьба космонавта существенно зависит от упругих свойств фала. Рассмотрим сейчас абсолютно неупругий фал. Предположение об абсолютной неупругости очень существенно: в иных предположениях движение космонавта может носить совершенно иной характер.

Итак, космонавт удалился от спутника на расстояние  $l$ , равное длине фала. Рассмотрим движение начиная с этого момента, предполагая начальные данные для такого движения известными (хотя бы из решения предыдущей задачи о свободном движении космонавта).

В дальнейшем можно ожидать из общих соображений либо продолжения свободного движения космонавта, либо движения по дуге окружности радиуса  $l$  вокруг центра масс спутника. Второе движение назовем связанным.

При каких условиях свободное движение переходит в связанное? Каков характер связанного движения? Может ли связанное движение перейти обратно в свободное и при каких условиях? Постараемся ответить на эти вопросы.

При выходе космонавта в какую-то точку сферы радиуса  $l$  или окружности этого же радиуса в рассматриваемом плоском случае (будем говорить «при выходе на сферу») из-за абсолютной неупругости фала полностью гасится составляющая скорости, направленная вдоль фала, в сторону от спутника. Составляющая же скорости, направленная нормально к натянутому фалу, сохраняется. Из уравнений (11.3.1) можно легко вывести интеграл энергии в виде

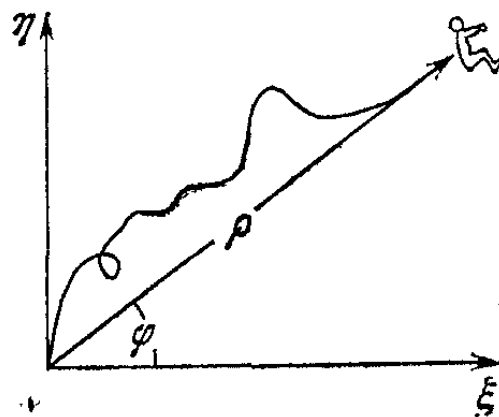


Рис. 11.9. Полярные координаты.

$$\eta'^2 + \xi'^2 - 3\eta^2 = h = \text{const.} \quad (11.6.1)$$

Введем полярные координаты  $\rho$ ,  $\varphi$  так, чтобы (рис. 11.9)

$$\eta = \rho \sin \varphi, \quad \xi = \rho \cos \varphi. \quad (11.6.2)$$

В этих переменных интеграл (11.6.1) имеет вид

$$\rho'^2 + \rho^2 \varphi'^2 - 3\rho^2 \sin^2 \varphi = h. \quad (11.6.3)$$

В свободном движении космонавта вплоть до его выхода на сферу энергия  $h$  сохраняется, так что в момент  $\tau_k$  выхода на сферу имеем

$$\begin{aligned} h_k &= \rho_k'^2 + \rho_k^2 \varphi_k'^2 - 3\rho_k^2 \sin^2 \varphi_k = \\ &= \rho_0'^2 + \rho_0^2 \varphi_0'^2 - 3\rho_0^2 \sin^2 \varphi_0, \end{aligned} \quad (11.6.4)$$

причем  $\rho_k = l$ ; нуликами отмечены начальные значения переменных, индексом «к» — значение в момент выхода на сферу. Здесь, как было сказано, радиальная скорость  $\rho'$  скачком падает до нуля. Однако трансверсальная скорость  $\rho\varphi'$  полностью сохраняется\*). Это значит, что и энергия скачкообразно изменилась от значения  $h_k^{(0)}$ , определяемого формулой (11.6.4), до значения

$$h_k^{(1)} = \rho_k^2 \varphi_k'^2 - 3\rho_k^2 \sin^2 \varphi_k, \quad \rho_k = l.$$

С этого момента движение происходит по сфере радиуса  $\rho = l$ . Движение будет определено полностью, если известно значение  $\varphi(\tau)$ , а это значение определяется интегрированием уравнения

$$\varphi'^2 - 3 \sin^2 \varphi = h_1, \quad (11.6.5)$$

где  $h_1 = h_k^{(1)}/l^2$ . Уравнение (11.6.5) получено из (11.6.3) при условии  $\rho' = 0$ ,  $\rho = l$  и является интегралом энергии для движения типа движения физического маятника и может быть проинтегрировано или проанализировано.

---

\*) Это можно доказать совершенно строго, используя теорему Карно об изменении кинетической энергии при неупругом ударе. По теореме Карно потерянная кинетическая энергия  $\Delta T$  равна энергии потерянных скоростей, так что

$$2\Delta T = (\rho'^2 + \rho^2 \varphi'^2)_1 - (\rho'^2 + \rho^2 \varphi'^2)_2 = (V_1 - V_2)^2.$$

Здесь индекс 1 соответствует моменту до удара, индекс 2 — моменту после удара; очевидно,  $\rho'_1 \neq 0$ ,  $\rho'_2 = 0$ ,  $\rho_1 = \rho_2$ ,  $\varphi'_1 \neq 0$ ,  $\varphi'_2$  подлежит определению,

$$V_1 = \rho'_1 \rho_0 + \rho_1 \varphi'_1 \tau_0, \quad V_2 = \rho_2 \varphi'_2 \tau_0 = \rho_1 \varphi'_2 \tau_0,$$

где  $\rho_0$  и  $\tau_0$  — радиальный и трансверсальный единичные векторы. Вычисляя квадрат разности  $(V_1 - V_2)^2$  и подставляя в предыдущую запись теоремы Карно, убеждаемся, что  $\varphi'_1 = \varphi'_2$ .

Однако движение, описываемое уравнением (11.6.5), может происходить только тогда, когда фал натянут, а это может иметь место только в случае, когда производная  $\rho''$  положительна. В самом деле, так как на сфере  $\rho' = 0$ , то условие  $\rho'' > 0$  означает, что радиальная скорость стремится возрасти, то есть космонавт имеет тенденцию уйти по радиусу  $\rho$  из сферы. Но фал его туда «не пускает», гасит «на корню» эту тенденцию, сохраняя постоянным (равным нулю) значение радиальной скорости.

Пусть теперь  $\rho'' < 0$ . Фал немедленно даст «слабину»! Ведь это условие означает, что радиальная скорость уменьшится, то есть станет меньше нуля, но тогда космонавт сойдет со сферы внутрь ее, не будучи ничем сдерживаемым. Поэтому ясно, сколь важно получить значение  $\rho''$  на сфере. Напишем это выражение. На сфере  $\rho' = 0$  и  $\rho = l$ , используя уравнение (11.3.1) движения, найдем

$$\frac{1}{l} \rho'' = \varphi'^2 - 2\varphi' + 3 \sin^2 \varphi.$$

Итак, если

$$\varphi'^2 - 2\varphi' + 3 \sin^2 \varphi > 0, \quad (11.6.6)$$

то движение происходит согласно интегралу (11.6.5).

Если же

$$\varphi'^2 - 2\varphi' + 3 \sin^2 \varphi < 0, \quad (11.6.7)$$

то происходит «срыв» движения со сферы внутрь ее. Таким образом, (11.6.7) определяет условие перехода в свободное движение, в то время как (11.6.5), (11.6.6) определяют связанное движение. Удобно рассмотреть движение на фазовой плоскости  $\varphi, \varphi'$  (рис. 11.10). Связанному движению отвечают интегральные кривые (11.6.5), изображенные на этом рисунке. «Зоны срыва», удовлетворяющие (11.6.7), заштрихованы. Свободное движение в «зоне срыва» не может быть изображено в плоскости  $\varphi, \varphi'$  хотя бы потому, что фазовое пространство свободного движения четырехмерно.

Сначала рассмотрим такие движения космонавта, при которых он не входит в «зону срыва», а все время остается на сфере, так что фал остается натянутым. Из фазовой картины (рис. 11.10) можно понять, что в этом случае движение космонавта может быть двух типов: вращательное (непрерывное движение по окружности в одну сторону) или колебательное — колебание около направления радиуса-вектора спутника (значения  $\varphi = \pi/2$  и  $\varphi = 3\pi/2$

по определению угла  $\varphi$  означают, что трос натянут вдоль радиуса-вектора спутника; при этом, если  $\varphi = \pi/2$ , то космонавт по сравнению со спутником более удален от Земли, а при  $\varphi = 3\pi/2$  он ближе к Земле). Выведем условия, при которых космонавт выходит за режим вращения или колебания без срывов в свободное движение,

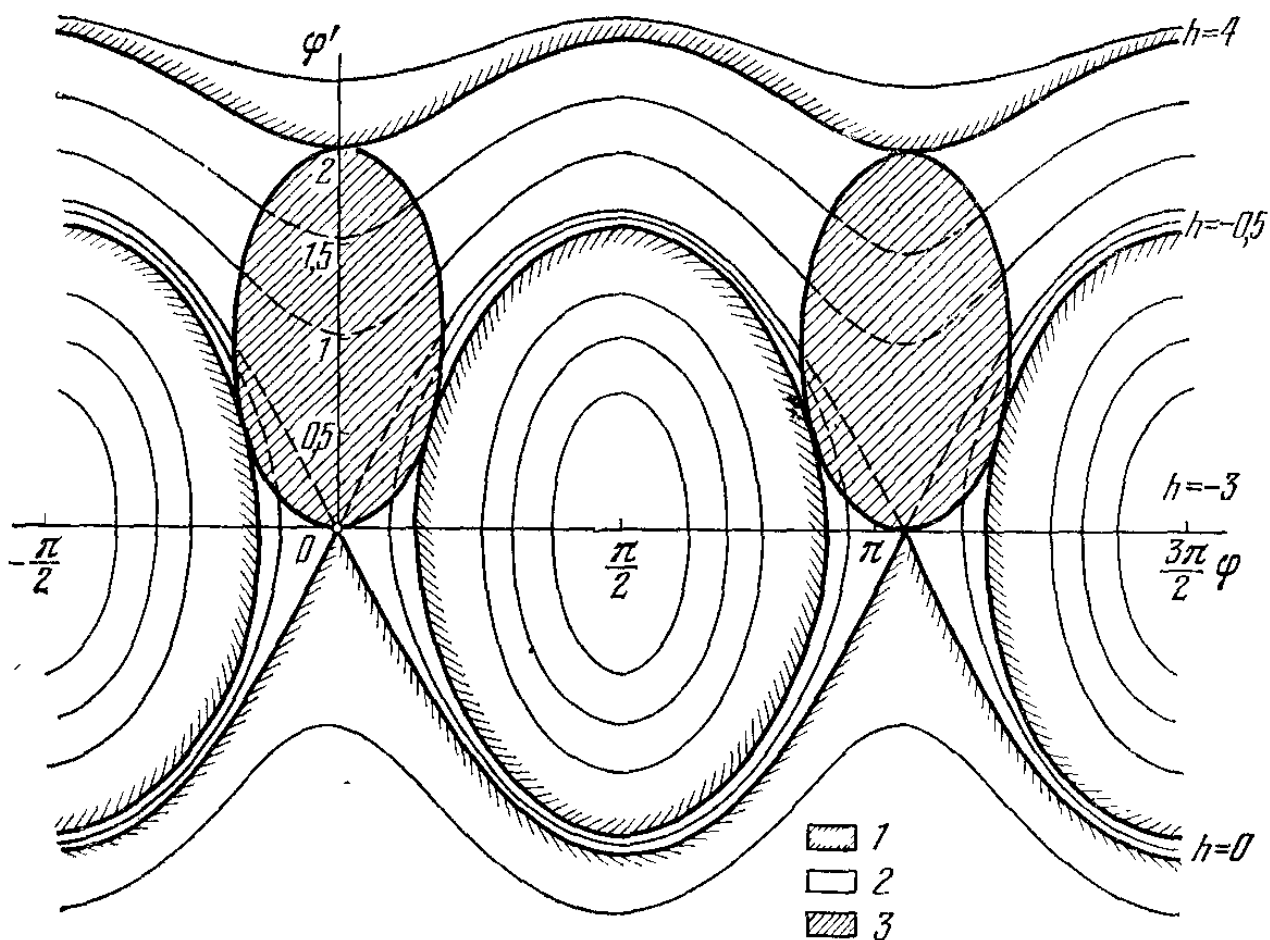


Рис. 11.10. Фазовая плоскость: 1 — зоны неэволюционирующего связанного движения; 2 — зоны эволюционирующего движения (связное движение вдоль интегральных кривых переходит в свободное движение на границе зоны 3); 3 — зоны срыва.

Заметим, что, вообще говоря, колебательные и вращательные движения разграничены кривой (*сепаратрисой*), проходящей через начало координат и, следовательно, отвечающей значению  $h_1 = 0$  в интеграле (11.6.5). При  $h_1 > 0$  получаются вращательные движения, при  $h_1 < 0$  — колебательные (о срывах пока не говорим). Из рассмотрения «фазового портрета» (рис. 11. 10) видно, что космонавт будет вращаться в одну сторону, без срывов, в следующих двух случаях:

- 1)  $h_1 \geq 4$  в области  $\varphi' > 0$ ;
- 2)  $h_1 \geq 0$  в области  $\varphi' < 0$ ;

Схемы движения космонавта, соответствующие этим случаям, изображены на рис. 11.11. Условие колебатель-



ного движения без срывов:  $h_1 < h_1^*$ , где  $h_1^*$  определяется из условий касания кривых  $\varphi'^2 - 3 \sin^2 \varphi - h_1 = 0$  и  $\varphi'^2 - 2\varphi' + 3 \sin^2 \varphi = 0$ . Как нетрудно определить, в точке касания фазовой кривой, отвечающей колебательному

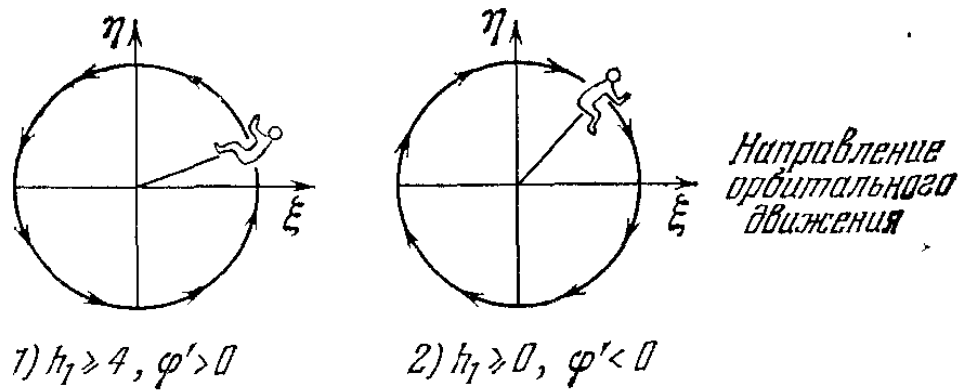


Рис. 11.11. Схема вращения космонавта на натянутом фале.

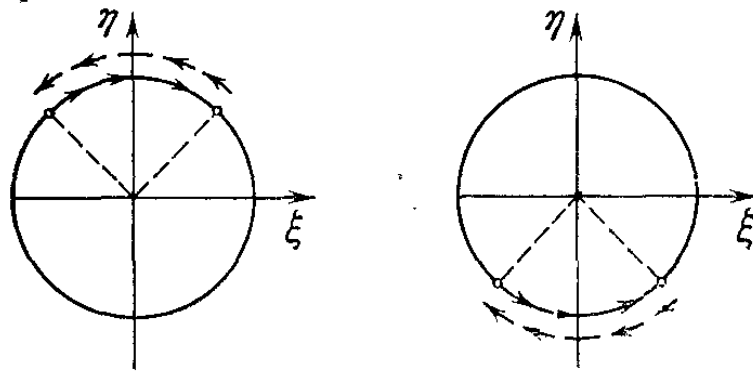


Рис. 11.12. Схема колебания на натянутом фале.

движению, с кривой, ограничивающей зону срыва, будем иметь:  $\varphi' = 1/2$ ,  $\sin \varphi = -1/2$ , соответственно  $h_1^* = -1/2$ .

Итак, если

$$3) \quad h_1 \leq -1/2,$$

то будет происходить колебательное движение космонавта относительно направления радиуса-вектора спутника, и притом без срывов в свободное движение (рис. 11.12). Очевидно, существует предельная амплитуда колебаний, происходящих без срыва. Эта амплитуда определяется из (11.6.5) при условиях  $h_1 = h_1^* = -1/2$ ,  $\varphi' = 0$ , что дает  $\sin^2 \varphi = 1/6$ . Вспоминая определение угла  $\varphi$ , заключаем, что предельная амплитуда колебаний около радиуса-вектора

$$a_{\max} \approx 65^\circ 55'.$$

«Чистые» колебания с амплитудой большей, чем  $a_{\max}$ , невозможны: неизбежно произойдет срыв космонавта в свободное движение.

В рассмотренных случаях 1) — 3) движение нашей системы аналогично движению твердого гантелеобразного спутника относительно его центра масс (см. очерк шестой).

Наконец, если

$$4) \quad -1/2 < h_1 < 0,$$

то происходят колебания со срывами в свободное движение, а если

$$5) \quad 0 \leq h_1 \leq 4, \quad \varphi' > 0,$$

то происходят вращения со срывом в свободное движение.

Области 4) — 5) составляют зону незавершенного смешанного движения. Рассмотрим его более подробно.

## 7. Эволюция смешанного движения

Можно поставить следующие вопросы. Если движение на сфере проходило по фазовой кривой, отвечающей значению  $h_1$  константы энергии в (11.6.5), а затем ушло в зону срыва, то

а) выйдет ли оно из зоны срыва снова на сферу?

б) если да, то на какую фазовую кривую?

На первый вопрос, вообще говоря, можно ответить положительно, так как по изученным выше свойствам свободного движения мы знаем, что рано или поздно космонавт опять выйдет на сферу.

Ответ на второй вопрос более сложен. Придется проследить все свободное движение после срыва вплоть до нового выхода на сферу, вычислить угловую координату выхода на сферу и угловую скорость. Это вычисление ставит в соответствие некоторую точку  $(\varphi_1, \varphi'_1)$  фазовой плоскости другой точке  $(\varphi_2, \varphi'_2)$ . Точка  $(\varphi_1, \varphi'_1)$  лежит на границе зоны срыва; в эту точку  $(\varphi_1, \varphi'_1)$  «упирается» интегральная кривая, по которой шло движение до срыва. Точка  $(\varphi_2, \varphi'_2)$  — начальная точка нового участка связанного движения; дальнейшее движение идет по интегральной кривой, на которой лежит точка  $(\varphi_2, \varphi'_2)$  (если только  $(\varphi_2, \varphi'_2)$  не попадает внутрь зоны срыва). Таким образом, для понимания картины движения необходимо построить так называемое точечное отображение участков границы зоны срыва.

Метод исследования задач нелинейной механики, использующий такие построения, называется *методом точечных отображений*. Этот метод удобен при исследовании движения, которое на разных своих участках описывает-

ся разными системами дифференциальных уравнений. Необходимое для нас точное отображение строилось численными методами, с использованием быстродействующих электронных машин. Результат вычислений изображен на рис. 11.13. Там построено отображение только для одной зоны срыва. Для другой — все аналогично.

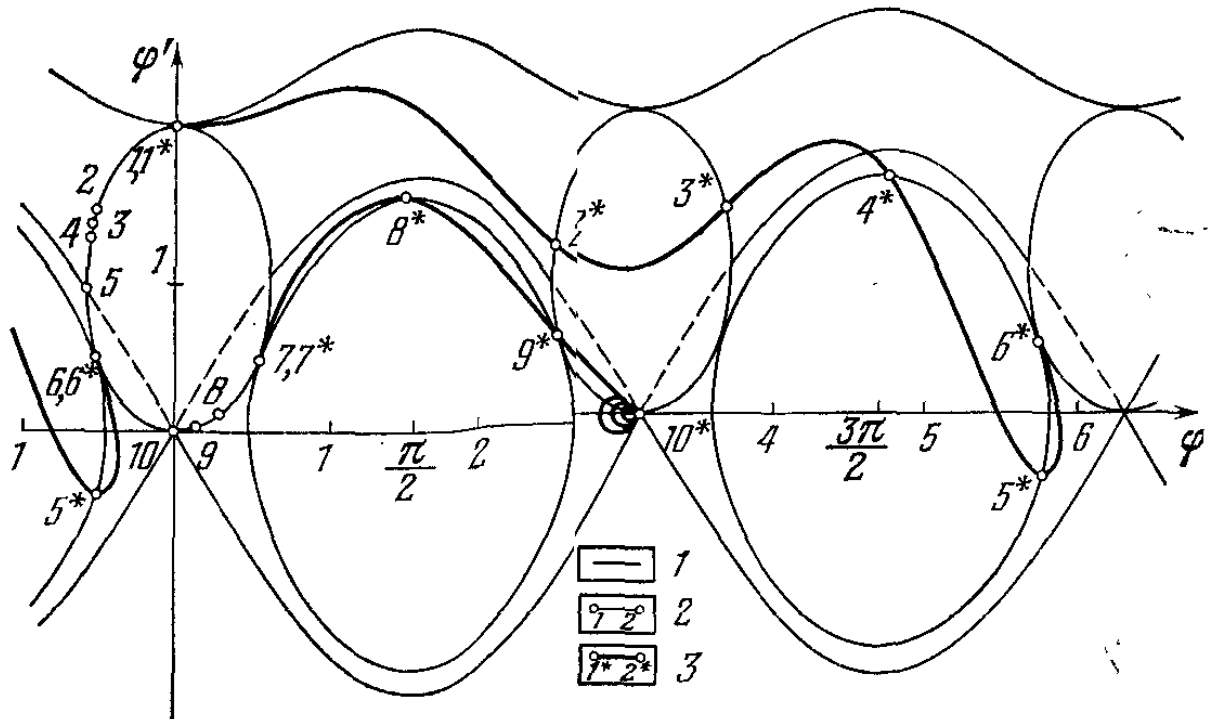


Рис. 11.13. Отображение границ зоны срыва: 1 — фазовые траектории и границы зоны срыва; 2 — отображаемые участки границы зоны срыва; 3 — их отображения. Участки  $[1, 1^* - 7, 7^*]$  и  $[6, 6^* - 10]$  не отображаются.

Самое главное — это отображение помогает представить всю эволюцию движения (а не только второй этап). В самом деле, если есть отображение  $\varphi_1, \varphi_1' \Rightarrow \varphi_2, \varphi_2'$  для любой точки  $(\varphi_1, \varphi_1')$  на границе зоны срыва, то дальнейшая картина движения становится ясной: точка  $(\varphi_2, \varphi_2')$  приводит по некоторой интегральной кривой снова на границу зоны срыва в точку  $(\varphi_1^{(1)}, \varphi_1'^{(1)})$ , отображение  $(\varphi_2^{(1)}, \varphi_2'^{(1)})$  которой мы уже умеем найти, и т. д. Некоторую трудность вызывает то обстоятельство, что начальная или отображенная точки могут лежать внутри зоны срыва. Физически это означает, что фал, натянувшись, в тот же момент ослабляется, так что на сфере оказывается одна единственная точка траектории движения (а не участок траектории).

Поэтому для полного анализа движения нужно строить отображения не только границ зоны срыва, но всей этой зоны целиком. За подробностями отсылаю читателя к статье

автора [11.2]. Здесь же отмечу, что указанное обстоятельство не играет принципиальной роли для эволюции движения. Эту эволюцию особенно удобно проследить по энергетической кривой, дающей зависимость энергии  $h_2$  после выхода на связь (после удара) от энергии  $h_1$  до выхода на связь. Эта энергетическая кривая  $h_2(h_1)$  изображена на рис. 11.14. Пусть начальная энергия равна  $h_1$ .

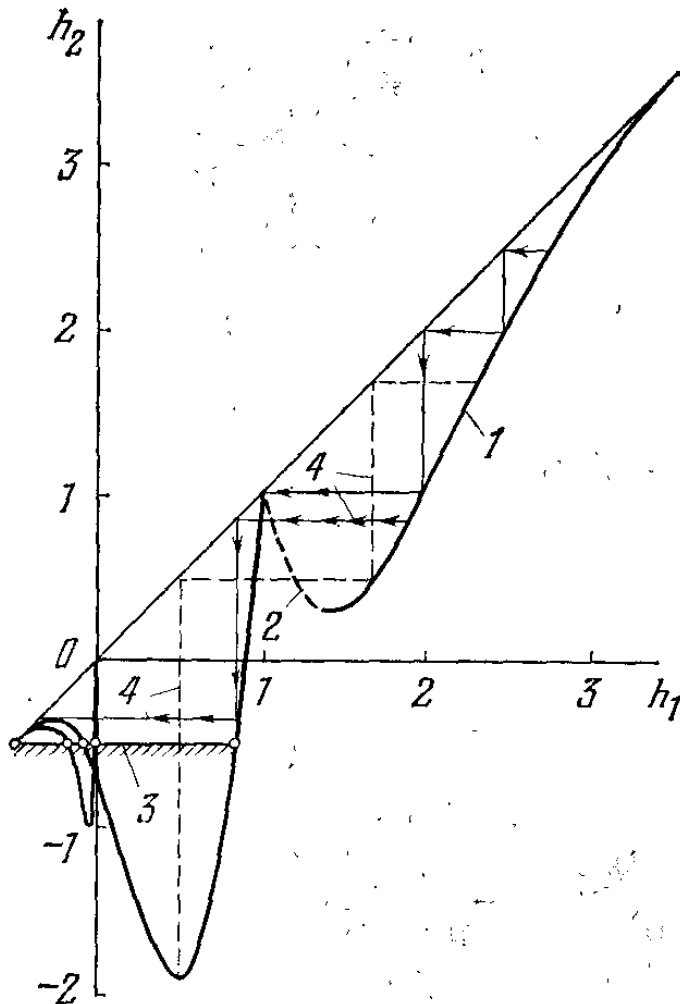


Рис. 11.14. Энергетическая кривая.

Находим по рисунку соответствующее значение  $h_2$ . Примем это значение  $h_2$  за новое начальное значение  $h_1$ , находим новое  $h_2$  и т.д. Такой ступенчатый процесс отражает ступенчатое изменение энергии при последовательных выходах на связь. Из рисунка легко видеть, что в результате конечного или бесконечного числа выходов на связь движение приходит к некоторому предельному движению, энергия которого уже не может изменяться. Таким предельным движением является, на пример, движение с  $h = 1$ . Оно носит сме-

шанный характер, частично связанное, частично свободное и изображено на рис. 11.15. Время выхода на этот предельный режим конечно; однако множество начальных значений энергии, приводящих к этому режиму, дискретно («имеет меру нуль» по отношению ко всему множеству начальных значений энергий). Поэтому вероятность попасть на такой режим мала (в строгом смысле — вероятность равна нулю).

Аналогичный характер носит бесконечная серия периодических предельных режимов с малыми отрицательными значениями энергии. Некоторые из этих режимов изображены на рис. 11.16. Это режимы с очень большими периодами (колебания с малыми отрицательными значе-

ниями энергии происходят по участкам фазовых кривых, (близких к сепаратрисе; каждая «волна» свободного движения соответствует половине периода обращения спутника по орбите).

Но имеются предельные режимы, к которым приводят не дискретные, а плотные множества значений энергии.

Это чисто связанные движения — колебания около положения относительного равновесия со значениями энергии  $-1,85 \leq h \leq -0,5$ .

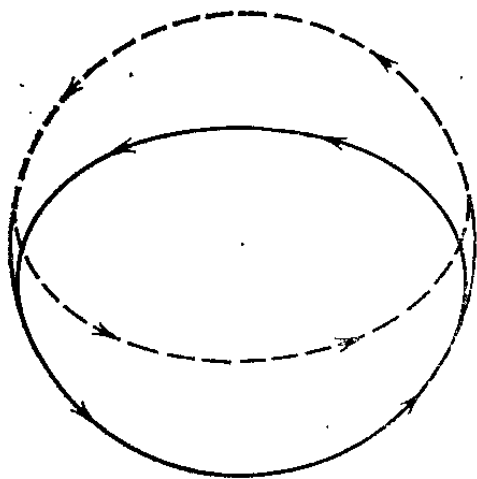


Рис. 11.15. Периодическое движение при  $h = 1$ .

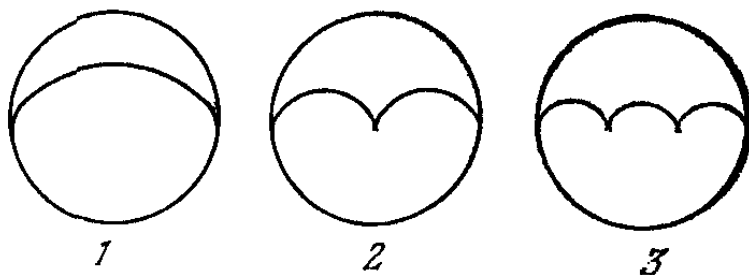


Рис. 11.16. Периодические режимы с отрицательными энергиями.

Движение «скатывается» за конечное время к колебаниям с каким-либо фиксированным значением  $h$  из указанного интервала; но может также случиться, что движение будет бесконечно долго стремиться к колебаниям со значением  $h = -0,5$ . На рис. 11.17 и в таблице указаны все возможные предельные движения.

Конечно, читатель отдаст себе отчет, что рассмотренная эволюция движения лишь условно может быть отнесена к реальной картине движения космонавта в окрестности спутника. Прежде всего, для анализа движения космонавта нет надобности рассматривать очень большие интервалы времени и предельные движения. Но эта же задача применима к любой системе двух тел, связанных тросом и летящих в космосе; например, это может быть спутник, состоящий из двух секций. Его относительное движение описывается точно так же. Такие двухсекционные спутники применяются, в частности, для их ориентации по направлению к Земле с помощью гравитационных сил (так называемые «пассивные гравитационные системы ориентации», о которых говорилось в шестом очерке). Для таких спутников как раз важно ответить на вопрос о предельных режимах их движения. Желательно, чтобы в пределе спутники строго ориентировались на Землю.

Множество начальных данных, приводящих к движению	Движение
	<p>А. Движения, не выводящие на окружность <math>\xi^2 + \eta^2 = 1</math></p>
$2\eta_0 + \xi'_0 = 0,  e_4  + 2\sqrt{c_2^2 + c_3^2} \leq 1,$ $e_2 = \eta'_0, c_3 = -3\eta_0 - 2\xi'_0, e_4 = \xi_0 - 2\eta'_0$	<p>Периодическое, с орбитальным периодом, по эллипсу <math>\eta^2/(c_2^2 + c_3^2) + (\xi - e_4)^2/4(c_2^2 + c_3^2) = 1</math></p>
	<p>Б. Движения, выводящие на окружность <math>\xi^2 + \eta^2 = 1</math></p>
<p>I — 1° <math>h = \varphi_0'^2 - 3 \sin^2 \varphi \geq 4, \varphi' &gt; 0.</math>                      I — 2° <math>h \geq 0, \varphi' &lt; 0.</math>                      I — 3° <math>-3 \leq h \leq -0,5.</math></p>	<p><i>I Неэволюционирующие</i></p> <p>1° Вращение по окружности <math>\xi^2 + \eta^2 = 1</math> против направления орбитального движения.                      2° Вращение по окружности <math>\xi^2 + \eta^2 = 1</math> по направлению орбитального движения.                      3° Колебания по окружности <math>\xi^2 + \eta^2 = 1</math> около положения устойчивого равновесия.</p>
<p>II — 1° Множество начальных данных ненулевой меры.                      II — 2° Множество начальных данных ненулевой меры.                      II — 3° Дискретное <math>\infty^1</math> множество начальных данных.                      II — 4° Дискретное <math>\infty^2</math> множество начальных данных.</p>	<p><i>II Эволюционирующие</i></p> <p>1° Предельный цикл — колебания по окружности <math>\xi^2 + \eta^2 = 1</math> при <math>h = -0,5</math>; время перехода бесконечно.                      2° Предельные колебания по окружности <math>\xi^2 + \eta^2 = 1</math> при любом <math>h</math> из интервала <math>-1,85 \leq h \leq -0,5</math>. Время перехода конечно.                      3° Смешанный периодический режим со сходом с окружности <math>\eta^2 + \xi^2 = 1, h = 1</math>. Время перехода конечно.                      4° Дискретное множество смешанных периодических режимов со сходом с окружности <math>\eta^2 + \xi^2 = 1</math>:</p> <p style="text-align: center;"><math>h_1 = -0,00825, \quad h_2 = -0,00215,</math>  <math>h_3 = -0,00095, \quad \dots, \quad h_\infty = -0.</math></p> <p>Время перехода конечно.</p>

(В нашей схеме видим, что если при первом же выходе на связанное движение не получатся колебания относительно направления на Землю с амплитудой, меньшей  $48^\circ$  ( $h = -1,85$ ), то амплитуда меньше  $48^\circ$  не будет никогда.)

Гораздо большей условностью является принятая схема абсолютно неупругого выхода на связь. На самом

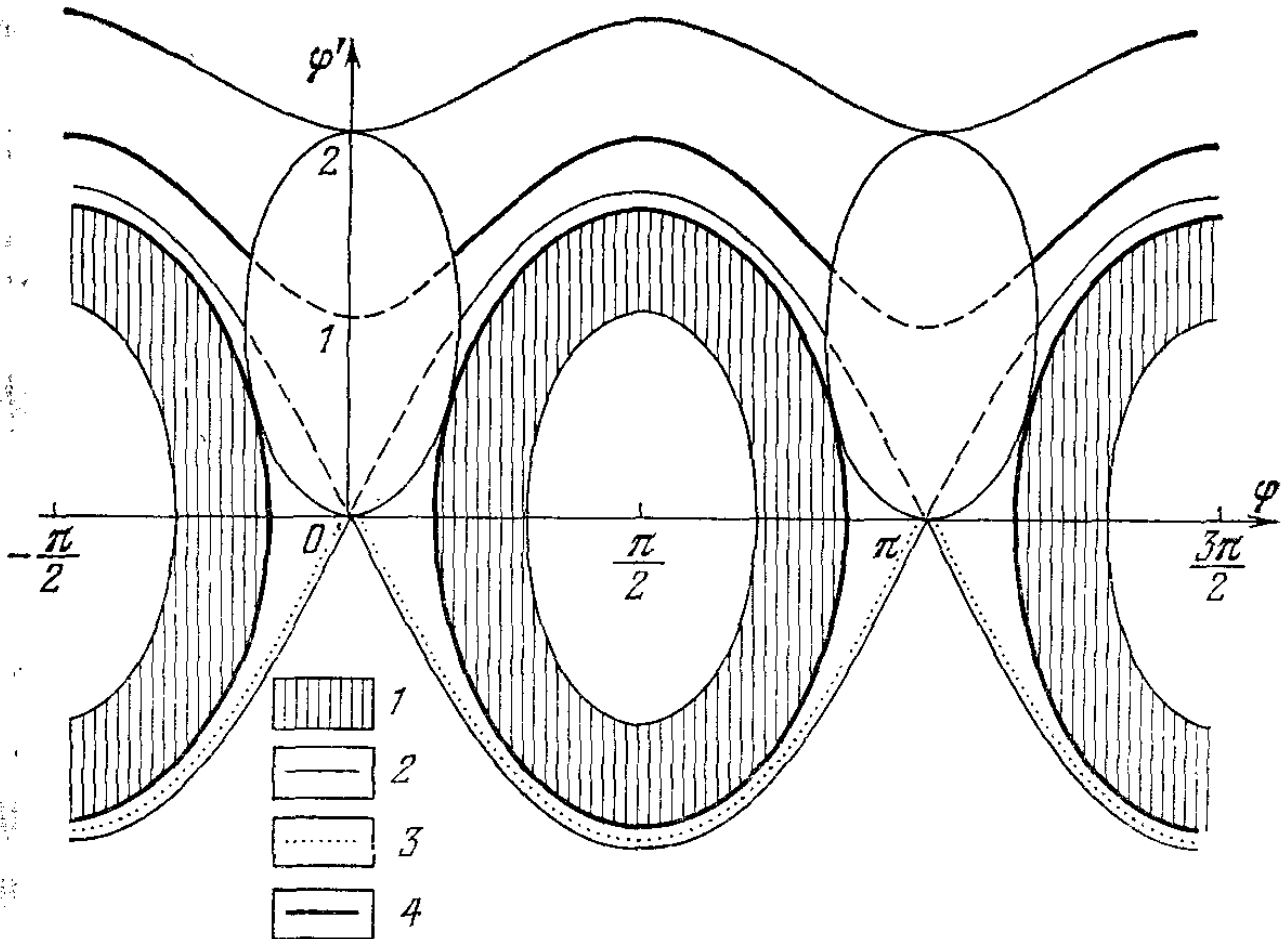
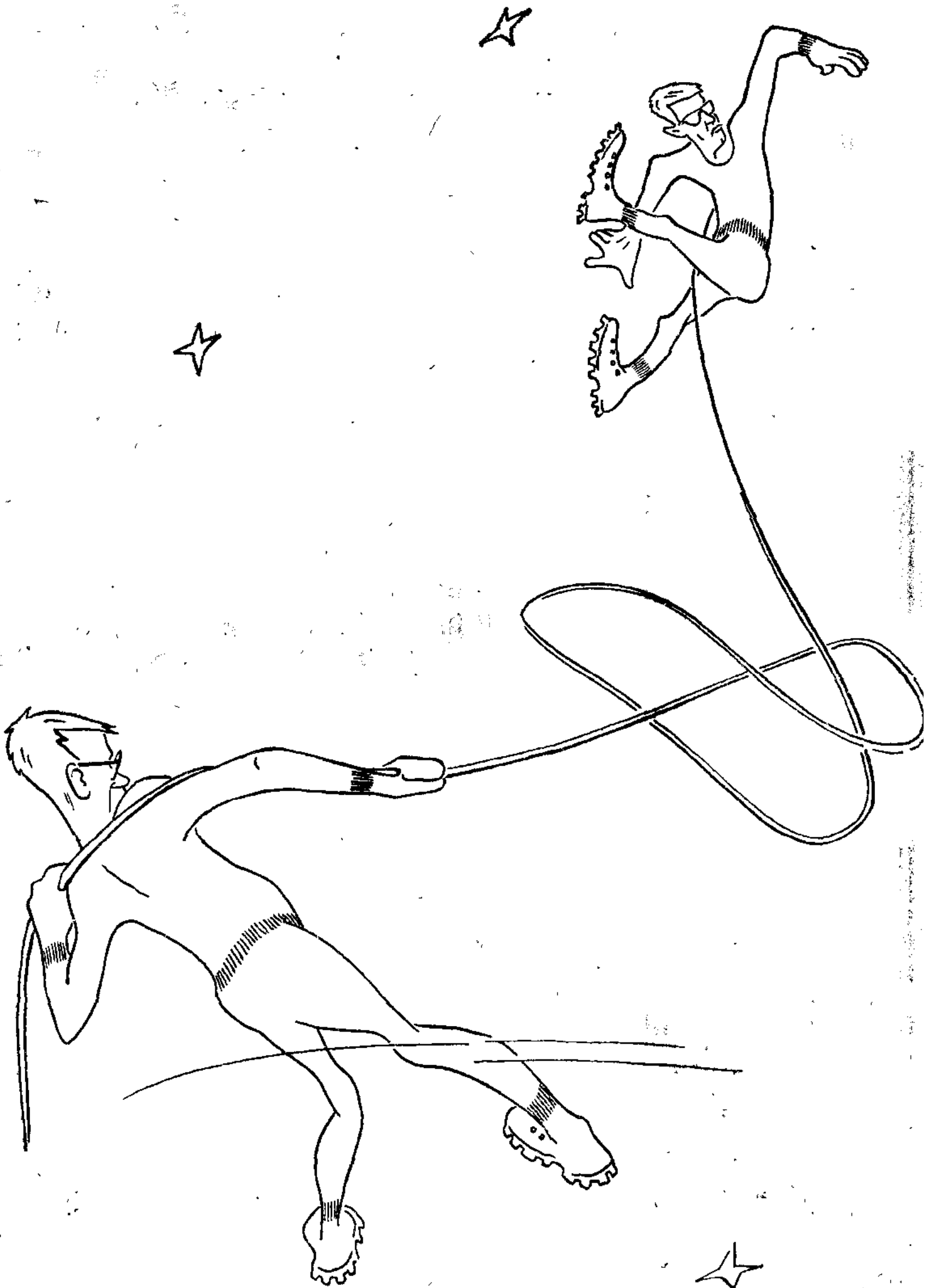


Рис. 11.17. Предельные режимы на фазовой плоскости: 1 — множество предельных режимов, ограниченное предельным циклом с  $h = -0,5$ ; 2 — фазовые траектории и границы зоны срыва; 3 — область предельных движений с  $h = -0,00825$ ;  $h = -0,00095$  и т. д.; 4 — предельный цикл с  $h = -0,5$  и предельное движение с  $h = 1$ .

деле, выход на связь является частично упругим; кроме того, в процессе «свободного» движения происходит рассеяние энергии за счет изгибов и кручения троса, так что движение носит сложный характер. Но исследование более строгих постановок — дело специальных работ. Наша цель была другая — понять характер задачи, ее место среди прочих задач механики космического полета, прочувствовать возникающие проблемы и возможные методы исследования.





Двухсекционный спутник, секции которого соединены достаточно длинным тросом, представляет собой благодарный объект для исследования. Самый безобидный из вопросов, которые еще ждут ответов: может ли эта система сама завязаться узлом?

## 8. Пространственная связка тел

Можно вообразить себе космическую станцию, состоящую из нескольких одинаковых секций, связанных тросами так, что станция представляет собой пространственную конфигурацию. Например, четыре одинаковых секции, соединенные друг с другом тросами одинаковой длины, образуют тетраэдральную связку тел. Может ли подобная связка сохранять постоянную конфигурацию на орбите? На этот вопрос, поставленный Е. А. Девяниным, дан ответ Е. Т. Новиковой. Рассмотрим эту задачу.

Аналогично (11.2.3), уравнения движения имеют вид

$$\ddot{\rho}_i + \frac{\mu}{R^3} \rho_i - \frac{3\mu}{R^5} (\mathbf{R} \cdot \rho_i) \mathbf{R} = \sum_{j=1}^3 \lambda_{ij} (\rho_i - \rho_j). \quad (11.8.1)$$

Здесь  $\rho_i$  — радиус-вектор  $i$ -й секции станции относительно центра масс станции,  $\lambda_{ij}$  — множитель Лагранжа за счет связи между  $i$ -й и  $j$ -й секциями. В связном движении (сохранение тетраэдральной конфигурации) все  $\lambda_{ij}$  должны быть отрицательны. Условия связей:

$$|\rho_i - \rho_j| \leq l.$$

Если конфигурация сохраняется, то станция неизбежно будет вращаться с постоянной по величине и направлению в пространстве угловой скоростью  $\Omega$ , потому что эллипсоид инерции «затвердевшей» станции — сфера ( $A = B = C$ ). Тогда

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \Omega \times \rho_i, \quad \frac{d^2\rho_i}{dt^2} = \Omega \times (\Omega \times \rho_i) = \Omega (\Omega \cdot \rho_i) - \rho_i \Omega^2,$$

и уравнение (11.8.1) принимает вид

$$\Omega (\Omega \cdot \rho_i) + \left( \frac{\mu}{R^3} - \Omega^2 \right) \rho_i - \frac{3\mu}{R^5} (\mathbf{R} \cdot \rho_i) \mathbf{R} = \sum_{j=1}^3 \lambda_{ij} (\rho_i - \rho_j). \quad (11.8.2)$$

Умножим это уравнение скалярно на  $\Omega$ . Получим

$$\frac{\mu}{R^3} \Omega \rho_i^2 - \frac{3\mu}{R^5} (\mathbf{R} \cdot \rho_i) (\mathbf{R} \cdot \Omega) = \sum_{j=1}^3 \lambda_{ij} (\rho_i^2 - \rho_j^2), \quad (11.8.3)$$

где  $\rho_k^2$  означает проекции векторов  $\rho_k$  на ось  $\Omega$ . Все эти проекции  $\rho_k^2$  постоянны в силу того, что станция, как целое, вращается вокруг оси  $\Omega$ . Пусть  $\rho_i^2 > 0$  есть наибольшее из  $\rho_k^2$ . Тогда все  $\rho_i^2 - \rho_j^2 > 0$ . Ввиду того, что  $\Omega = \text{const}$ , а  $\mathbf{R}$  замечает некоторую плоскость (плоскость орбиты), наступит момент, когда  $\mathbf{R} \cdot \Omega = 0$ . В этот момент левая часть (11.8.3) положительна, что возможно, если хотя бы одно из  $\lambda_{ij}$  положительно (ввиду  $\rho_i^2 - \rho_j^2 > 0$ ).

Но положительность  $\lambda_{ij}$  означает «ослабевание» троса между  $i$ -й и  $j$ -й секциями, то есть сход со связи. Таким образом, постоянное сохранение конфигурации рассматриваемой пространственной связки тел невозможно.

## КОСМИЧЕСКАЯ ВЕРТУШКА

— Помилуйте, сеньор,— возразил Санчо Панса,— это вовсе не великаны, а ветряные мельницы.

Сервантес  
«Дон-Кихот»

### 1. Спутники «Протон»

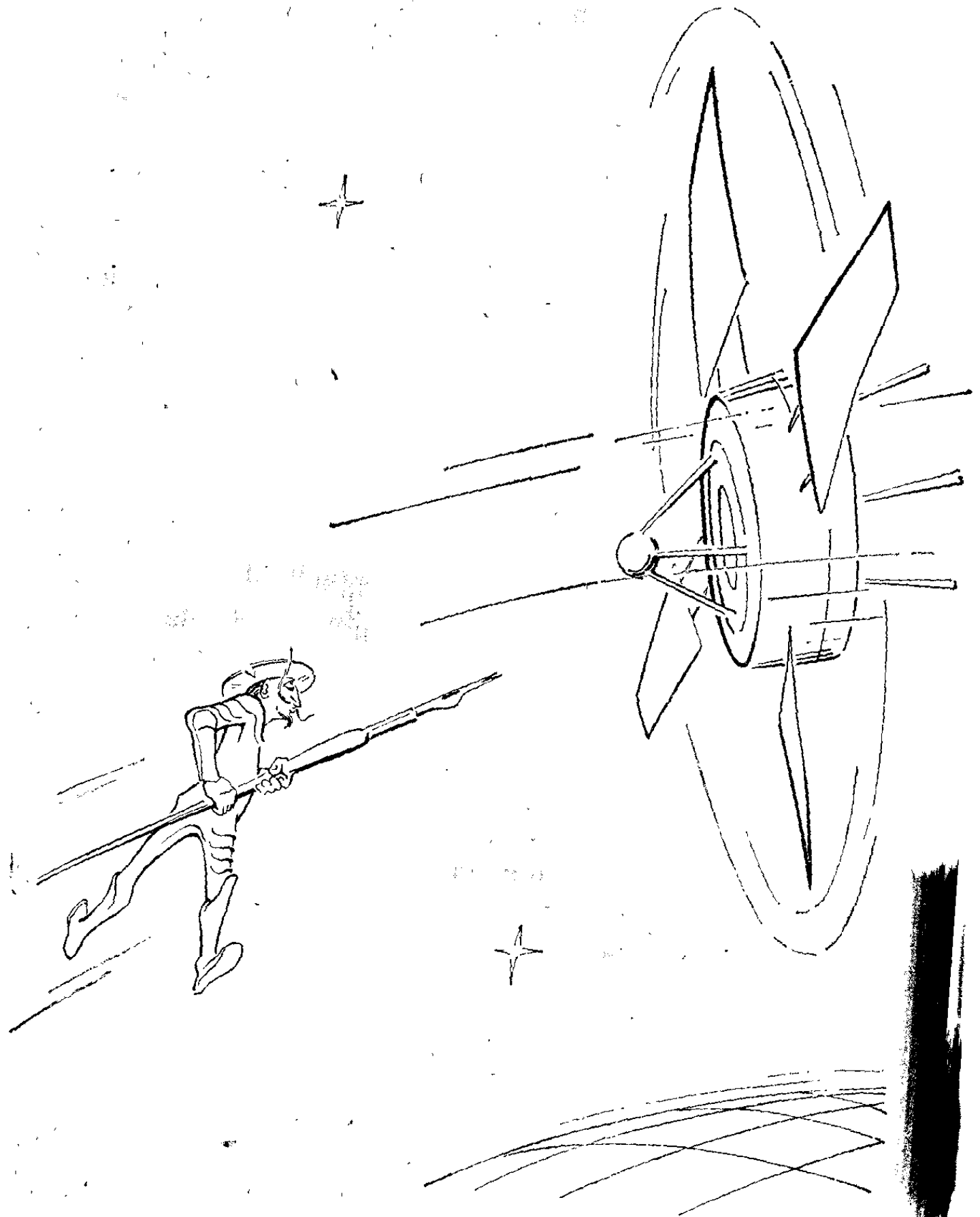
В очерке шестом этой книги рассказывалось о достопримечательных эффектах в движении спутника около его собственного центра масс, в эволюции вращения и ориентации спутника. Однако там речь шла о явлениях, в некотором роде общих и для естественных, и для искусственных небесных тел; эти явления вызваны воздействием гравитационного поля.

Между тем на искусственные спутники действует ряд других сил. Например, аэродинамических. Спутник движется в верхних, сильно разреженных слоях атмосферы Земли, где систематическое влияние очень малых аэродинамических сил может привести (и действительно приводит) к медленной эволюции как орбиты спутника, так и его вращательного движения.

Так как формы спутников могут быть разнообразны и порой весьма «экзотическими», а аэродинамические свойства существенно зависят от формы спутника, то и эволюция ориентации спутника под действием моментов аэродинамических сил оказывается порой довольно эффективной, также «экзотической».

В 1965—1968 годах в СССР была запущена серия тяжелых (самых тяжелых из научных) спутников «Протон». Характерной особенностью их конструкции является наличие на спутнике больших лопастей солнечных батарей, расположенных по отношению к осям спутника кососимметрично. Это видно из рис. 12.1, на котором изображен спутник «Протон».

При движении спутника по орбите на него набегают потоки разреженной среды. Этот поток, попадая на лопасти



батарей, раскручивает спутник подобно тому, как раскручивается ветром детская вертушка или крылья ветряной мельницы. С той только разницей, что крылья нашей «мельницы» намертво скреплены со спутником и заставляют его крутиться вместе с собой. Это вызывает целый ряд своеобразных явлений в эволюции вращения и ориентации спутника «Протон».

## 2. Как это было обнаружено

Эти явления были обнаружены при анализе экспериментальных данных о вращении и ориентации спутника «Протон-2».

В шестом очерке было обещано объяснить, что это такое — экспериментальное определение ориентации спутников. Настало время выполнить обещание.

Дело в том, что об ориентации спутника и изменении ее со временем заранее, как правило, ничего не известно (мы подразумеваем, что на спутнике нет специальной системы ориентации). А эту ориентацию знать нужно: без этого часто невозможно правильно объяснить показания научных приборов на спутнике. А ведь научные приборы измеряют физические характеристики околоземного и космического пространства; цель запуска спутника — какой-то новый этап в познании природы. Но какое уж тут познание, если нельзя объяснить показания приборов? Вот и нужно знать, в какой момент куда «смотрит» тот или иной прибор, то есть знать ориентацию спутника в пространстве.

Для этого на спутнике устанавливают какие-либо «датчики ориентации». Показания этих датчиков передаются на Землю. Солнечные датчики, например, дают информацию о том, освещено Солнцем окно датчика или нет; магнитные датчики могут показать, как направлена в данный момент относительно корпуса спутника силовая линия магнитного поля Земли и т. д. По этим данным и требуется восстановить ориентацию спутника.

Беда в том, что, во-первых, обычно показания датчиков рассредоточены так, что не на каждый момент времени

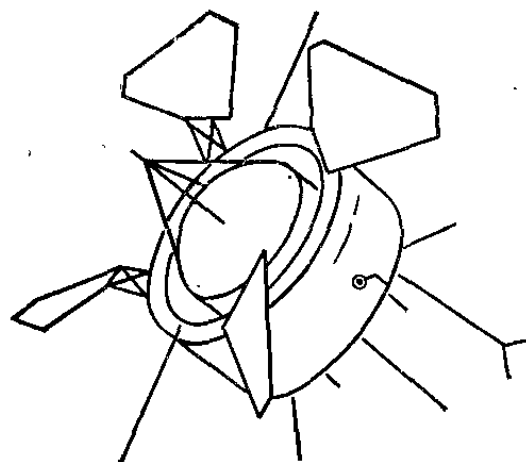


Рис. 12.1. Общий вид спутника «Протон».

есть показания более одного датчика, а на некоторые моменты вообще нет никаких показаний.

Беда, во-вторых, в том, что показания датчиков неизбежно врут: всегда имеется хоть малая, но ошибка в этих показаниях (хорошо, если малая). Ведь датчик — это прибор, и существует тысяча помех его работе, и при передаче его показаний на Землю, и при считывании этих показаний; поэтому то, что ты держишь в руках, — это всегда немного (хорошо, если немного) не то, что тебе хотел сказать датчик.

Беда, в-третьих, в том, что заранее ничего не известно о движении спутника около центра масс, хотя бы приближенно, и нам не на что первоначально опереться в своем анализе.

Беда, в-четвертых, в том, что мы еще плохо знаем силы и моменты, действующие на спутник в космосе в каждом конкретном случае, и во многих случаях не можем уверенно прогнозировать эволюцию ориентации спутника.

Беда, в-пятых, в том, что существуют такие комбинации движения спутника и показаний датчиков, когда по этим показаниям принципиально нельзя определить это движение...

Кругом беда, а работать надо.

Естественно, что определение ориентации требует серьезной математической обработки результатов измерений. Необходимо задаться какой-то *моделью движения* спутника около центра масс, чтобы иметь возможность объединить одной «траекторией» движения разрозненные показания датчиков ориентации. Необходимо задать *статистический алгоритм обработки информации*, который позволил бы «наилучшим образом» использовать показания датчиков со всеми их случайными ошибками, «сгладить» влияние этих ошибок и получить какую-то «среднюю» траекторию, наилучшим образом соответствующую тому, что действительно «хотели сказать» датчики. При этом, если необходимо, то надо распорядиться обработкой так, чтобы параллельно с ориентацией спутника определять и возмущающие факторы (моменты сил, действующих на спутник).

Пусть, например, движение около центра масс описывается каким-то вектором

$$\mathbf{r}(\mathbf{a}, t), \quad (12.2.1)$$

который и определяет модель движения. Будем считать, что движение полностью известно, если известен набор постоянных параметров  $\mathbf{a}$  ( $a_i$ ) ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). Например, моделью движения является решение дифференциальных уравнений движения. Пусть моменты сил, входящие в эти уравнения, записаны в явном виде, но содержат некоторые, неизвестные точно, постоянные параметры; тогда  $a_i$  суть начальные данные для интегрирования этих уравнений и постоянные параметры в выражениях моментов сил.

Предположим, что в моменты времени  $t_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ;  $m < N$ ) сделаны какие-то измерения на спутнике, дающие величину  $\psi_n$ , зависимость которой от ориентации спутника может быть вычислена, так что расчетное значение  $\psi_n$  (обозначим его  $\tilde{\psi}_n$ ) будет  $\tilde{\psi}_n \{ \mathbf{r}(\mathbf{a}, t_n), t_n \}$ . Составим разности  $\xi_n = \psi_n - \tilde{\psi}_n$  между вычисленным и измеренным значениями функции  $\psi$ . Нужно так теперь определить искомые параметры  $\mathbf{a}$ , чтобы вся совокупность разностей  $\xi_n$  была каким-то образом минимизирована. Тогда рассматриваемая функция  $\tilde{\psi}(t)$  будет «в среднем» отвечать измерениям  $\psi_n$ . В математической статистике для этого употребляется, например, так называемый *метод наименьших квадратов*, когда минимизируется по  $\mathbf{a}$  сумма

$$\Phi = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_n^2} \xi_n^2, \quad (12.2.2)$$

где  $1/\sigma_n^2$  — некоторые весовые коэффициенты, зависящие от характера случайных ошибок в измерениях  $\psi_n$ . Необходимые условия минимума функции  $\Phi$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a_m} = 0 \quad (12.2.3)$$

дают  $m$  уравнений для определения  $m$  искомых параметров  $a_1, \dots, a_m$ .

Решение системы уравнений (12.2.3) относительно  $a_i$  — сама по себе трудная задача. Она решается обычно методом последовательных приближений. Для этого нужно знать начальное, нулевое приближение к значениям параметров  $a_i$ . Это нулевое приближение неоткуда взять, кроме как из той же информации об ориентации, которую предоставляют измерения  $\psi_n$ ; поэтому алгоритм определения должен включать в себя составной частью незави-

симый алгоритм определения нулевого приближения. Работы хватает, и она немислима без современных вычислительных средств — электронных вычислительных машин.

В теории движения искусственных спутников сформировалось целое направление [12.1]: математическая обработка траекторных измерений с целью определения фактических орбит и определения возмущающих факторов, действующих на них. Одна из первых работ этого направления выполнена Г. М. Энеевым, А. К. Платоновым, Р. К. Казаковой [12.10]. В многочисленных работах описывается определение по траекторным измерениям плотности верхней атмосферы Земли, гармоник потенциала земного тяготения, а в последнее время — и гармоник потенциала лунного тяготения по наблюдениям за движением искусственного спутника Луны. Первую работу такого рода выполнил Э. Л. Аким [12.2].

Задача определения по наблюдениям ориентации спутников в значительной степени соответствует задаче определения орбит и опирается на аналогичные методы; однако задача определения ориентации имеет свою специфику и свои трудности. Первое в мире определение ориентации спутника по данным бортовых измерений было проведено для третьего советского искусственного спутника [12.3]. Метод, использованный для определения ориентации спутников «Протон», и результаты такого определения описаны в [12.4], а также в ряде статей, из которых укажем [12.5—12.9] \*).

Остановимся на некоторых интересных динамических эффектах в эволюции ориентации спутника типа «Протон».

### 3. Что было обнаружено

На рис. 12.2 изображена полученная экспериментально [12.4, 12.8] картина эволюции со временем двух параметров вращения и ориентации спутника «Протон-2». Смысл одного из этих параметров — модуля  $L$  вектора кинетического момента — нам уже известен (очерк шестой);

---

\*) В процессе выполнения этих работ автору книги в течение нескольких лет посчастливилось сотрудничать с рядом исследователей. Это — Ю. В. Зоков (определение ориентации третьего советского спутника) [12.3]; В. В. Голубков и И. Г. Хацкевич (разработка автоматизированных методов, определение ориентации спутников серии «Протон» и других спутников) [12.3 — 12.8]; Э. К. Лавровский и С. И. Трушин (определение ориентации спутников серии «Электрон») [12.5].



другой параметр имеет следующий смысл:

$$h = \sin^2 \vartheta (1 + \varepsilon \sin^2 \varphi), \quad \varepsilon = \frac{B-A}{C-B} \frac{C}{A}. \quad (12.3.1)$$

Здесь  $A, B, C$  — главные центральные моменты инерции спутника ( $C > B > A$ );  $\vartheta$  — уже известный нам угол

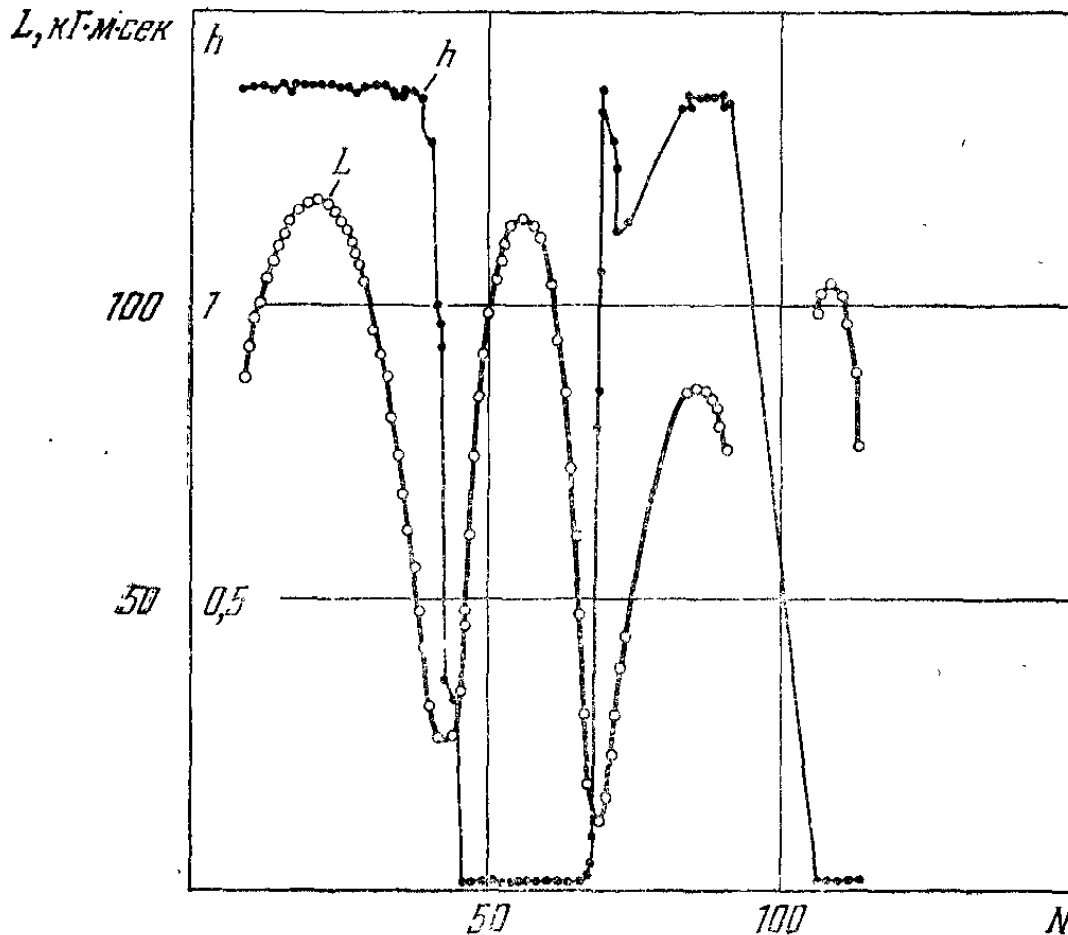


Рис. 12.2. Эволюция параметров вращения и ориентации спутника «Протон-2».

между продольной осью спутника (ось момента инерции  $C$ ) и вектором  $\mathbf{L}$  кинетического момента;  $\varphi$  — угол собственного вращения, равный углу поворота спутника вокруг продольной оси. Если моментов внешних сил нет, то в таком невозмущенном движении трехосного спутника величина  $h$ , как и  $L$ , остается постоянной. При этом значения  $h \sim 0$  соответствуют вращению вокруг продольной оси спутника ( $\vartheta = 0$  или  $\vartheta = \pi$ ), а значения  $h \sim 1 + \varepsilon$  соответствуют вращению в окрестности поперечной оси. Для динамически-симметричного спутника ( $B - A = 0$ ) изменение  $h$  от 0 до 1 просто бы означал изменение режима вращения от продольной закрутки ( $\vartheta = 0$ ) до кувыркания ( $\vartheta = \pi/2$ ); таким образом, поведение  $h$  качественно совпадает с поведением угла  $\vartheta$ .

Из шестого очерка ясно, что у быстро вращающегося в гравитационном поле спутника обе величины  $L$  и  $h$  будут постоянны; они не изменяются и при ряде других воздействий, а если имеются диссипативные силы, то  $L$  и  $h$  меняются монотонно; подробнее см. в другой книге автора [12.11].

Между тем на рис. 12.2 мы наблюдаем совершенно уникальную картину изменения параметров  $L$  и  $h$ : оба они долгопериодическим образом колеблются, и глубина

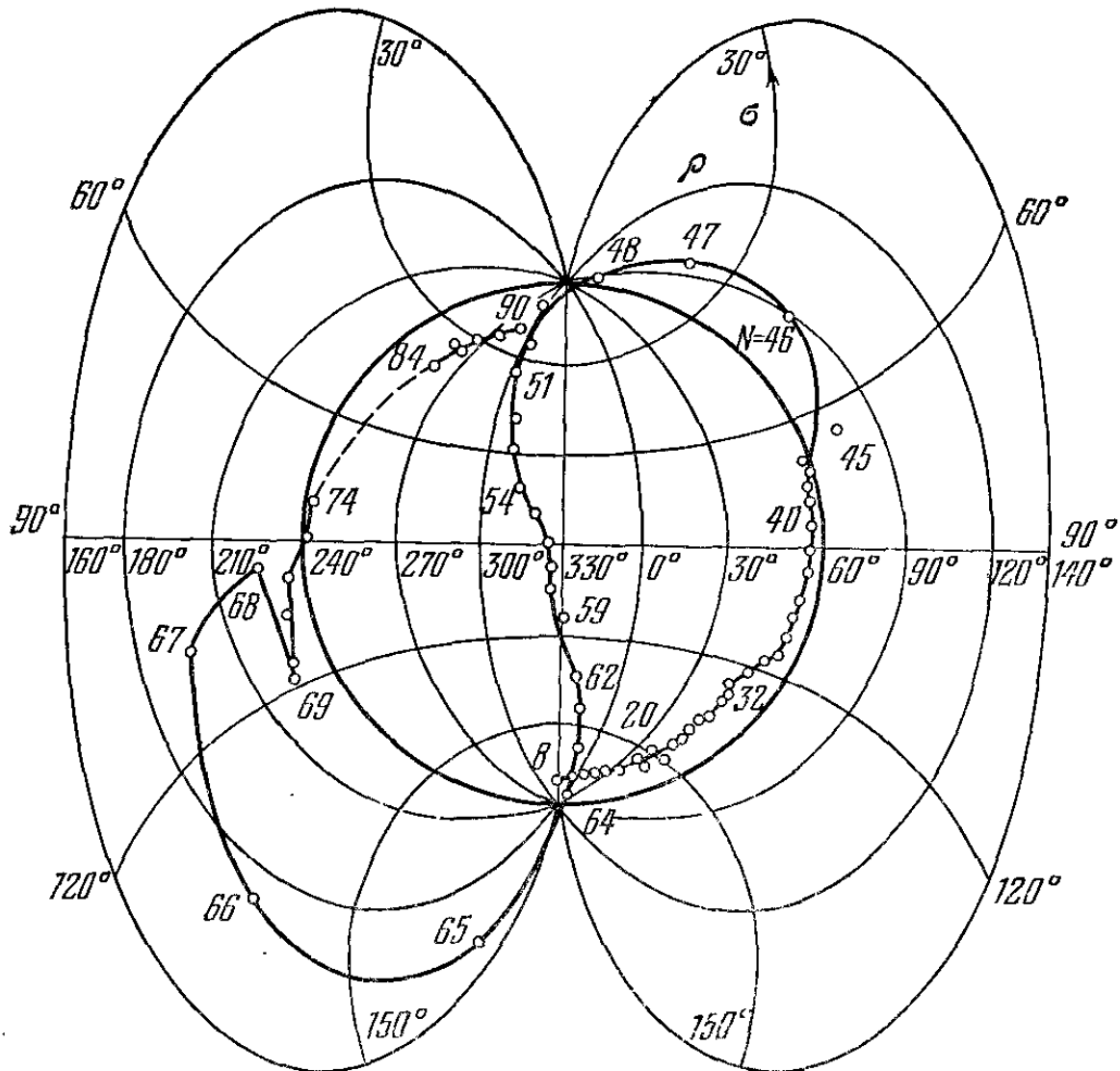


Рис. 12.3. След вектора кинетического момента спутника «Протон-2» на небесной сфере с номерами витков орбиты спутника. Точкам  $\rho = 0^\circ$  и  $\rho = 180^\circ$  отвечают соответственно Северный и Южный полюсы мира.

колебаний весьма велика. Величина  $L$  изменяется в 5 раз, а изменение  $h$  говорит, что спутник в своем вращении периодически переходит от режима осевой закрутки в режим кувыркания и обратно. Эволюция режима вращения, конечно, медленная: с периодом около 55—57 витков орбиты спутника (по оси абсцисс на рис. 12.2 отложе-

ны номера витков орбиты). Период модуляций величины  $L$  в два раза меньше; когда спутник закручен вокруг оси, то величина  $L$  (а значит, и угловая скорость вращения) максимальна, в переходном режиме от осевой закрутки к кувырканию  $L$  достигает минимума, в режиме кувыркания  $L$  опять имеет максимум и т. д.

Надо сказать, что положение вектора кинетического момента в пространстве тоже сильно меняется, колеблясь с размахом около  $180^\circ$ . На рис. 12.3 изображен след вектора кинетического момента спутника «Протон-2» на небесной сфере на первых 90 витках полета спутника; видно, что за это время он дважды прошел в окрестности каждого из полюсов мира.

#### 4. Как это объяснить

Все эти модуляции бывших когда-то спокойными величин объясняются *пропеллирующим эффектом* — воздействием набегающего потока на кососимметрично посаженные плоскости солнечных батарей. Нет никакой надобности строить здесь строгую теорию эффектов, так как они настолько «грубы», что проявляются в разумно поставленных модельных задачах. Будем считать спутник динамически-симметричным, линии, соединяющие центры противоположных лопастей, — проходящими через центр масс спутника, а корпус спутника, за исключением лопастей, — не дающим никакого аэродинамического момента (например, так будет, если корпус — шар с центром в своем центре масс).

В таких предпосылках от всего аэродинамического момента останется лишь момент пропеллирования. Его выражение мы сейчас смоделируем из простых соображений (более строгие постановки [12.4, 12.9] дают то же самое качество).

Пусть продольная ось спутника совпадает с направлением скорости  $V$  центра масс спутника. Тогда за счет «крыльев мельницы» должен создаваться постоянный крутящий момент, вращающий спутник вокруг его продольной оси (дуем в лоб вертушке — крутится). Этот момент должен, как всегда в аэродинамике, быть пропорциональным динамическому напору  $\rho V^2$ , где  $\rho$  — плотность набегающего потока,  $V$  — его скорость. Итак, пропеллирующий момент  $m = a_0 \rho V^2$ ; постоянная  $a_0$  должна иметь размерность  $m^3$  (произведение площади на «плечо»).

Естественно ожидать, что если отклонить ось спутника от направления потока, то величина пропеллирующего момента уменьшится и даже станет равной нулю, если ось спутника нормальна вектору скорости (дуем в ребро вертушке — не крутится). Если же ось спутника направлена против скорости, то момент должен быть равен по величине опять  $a_0 \rho V^2$ , но противоположен по знаку, так как относительно фиксированного положительного направления продольной оси спутника вращение будет идти в обратную сторону (из состояния покоя). Весь ход этой зависимости продольной составляющей момента от положения оси относительно вектора  $\mathbf{V}$  проще всего аппроксимировать формулой (которую мы и примем на вооружение)

$$M_z = \rho V^2 a_0 \alpha'', \quad (12.4.1)$$

где  $\alpha'' = \cos(z, \widehat{\mathbf{V}})$  — косинус угла между продольной осью  $z$  спутника и скоростью  $\mathbf{V}$  его центра масс. Две другие оси  $x$  и  $y$  направим по линиям, соединяющим центры противоположных лопастей. Но направления  $x$  и  $y$  ничем не хуже направления  $z$  — только работают две лопасти вместо четырех (другое  $a_0$ ), да лопасти повернуты в другую сторону (другой знак момента). В результате для компонент момента по осям  $x$ ,  $y$  можно написать

$$M_x = -\rho V^2 a_1 \alpha, \quad M_y = -\rho V^2 a_1 \alpha', \quad (12.4.2)$$

где  $\alpha = \cos(x, \widehat{\mathbf{V}})$ ,  $\alpha' = \cos(y, \widehat{\mathbf{V}})$ . Если лопасти наклонены, как это имеет место у «Протона», под углом  $45^\circ$  к продольной оси, то  $a_1 = \frac{1}{2} a_0$  (за счет работы всего двух лопастей из четырех при равных «эффективных площадях» \*) каждой лопасти). При других наклонах лопатки и продольной оси соотношение между  $a_1$  и  $a_0$  будет другое за счет разных «эффективных площадей», но всегда можно считать

$$a_1 < a_0. \quad (12.4.3)$$

Таким образом, поставлена следующая задача: изучить эволюцию быстрого вращения динамически-симметричного спутника, подверженного воздействию моментов (12.4.1), (12.4.2). Эволюцию можно рассматривать

---

\*) Площадь проекции лопасти на плоскость, нормальную к рассматриваемой оси.

в уже знакомых нам по очерку шестому переменных  $L$ ,  $\rho$ ,  $\sigma$  (модуль вектора кинетического момента и два угла, определяющие его положение относительно плоскости орбиты) и  $\vartheta$  (угол между вектором кинетического момента и продольной осью спутника). Однако здесь вместо  $\rho$ ,  $\sigma$  удобнее ввести: угол  $\theta$  между вектором  $\mathbf{L}$  кинетического момента и направлением скорости  $\mathbf{V}_\pi$  в перигее орбиты; угол  $\lambda$  поворота  $\mathbf{L}$  вокруг  $\mathbf{V}_\pi$ , отсчитанный от радиуса-вектора перигея орбиты (рис. 12.4).

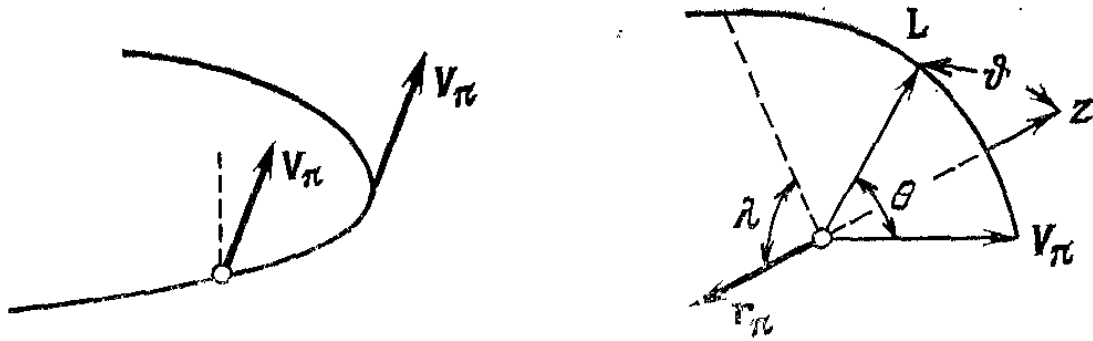


Рис. 12.4. Переменные, определяющие положение спутника и его кинетический момент.

Выписывая эволюционные уравнения и проводя обычную процедуру осреднения по быстрой переменной — углу прецессии  $\psi$ , получим следующую систему эволюционных уравнений [12.4]:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d\lambda}{dv} &= -\frac{\rho_\pi \sqrt{\mu P}}{L} \left[ a_1 - (a_0 + a_1) \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right] V_2 \frac{\sin \lambda}{\sin \theta}, \\
 \frac{d\theta}{dv} &= \frac{\rho_\pi \sqrt{\mu P}}{L} \left[ a_1 - (a_0 + a_1) \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right] \times \\
 &\quad \times (V_1 \sin \theta + V_2 \cos \theta \cos \lambda), \\
 \frac{dL}{dv} &= \rho_\pi \sqrt{\mu P} [-a_1 + (a_0 + a_1) \cos^2 \vartheta] \times \\
 &\quad \times (V_1 \cos \theta - V_2 \sin \theta \cos \lambda), \\
 \frac{d\vartheta}{dv} &= \frac{\rho_\pi \sqrt{\mu P}}{L} (a_0 + a_1) \sin \vartheta \cos \vartheta \times \\
 &\quad \times (V_1 \cos \theta - V_2 \sin \theta \cos \lambda).
 \end{aligned} \right\} (12.4.4)$$

В качестве независимой переменной вместо времени здесь взята истинная аномалия  $v$ . Как всегда,  $\mu$  — гравитационная постоянная,  $P$  — фокальный параметр орбиты; кроме того,  $\rho_\pi$  — плотность атмосферы в перигее орбиты.

Если обозначить  $\bar{\rho} = \rho/\rho_\pi$ , то функции  $V_1, V_2$  могут быть записаны в виде

$$V_1 = \bar{\rho}(\tilde{h}) \frac{(e + \cos v) \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos v}}{(1 + e \cos v)^2},$$

$$V_2 = \bar{\rho}(\tilde{h}) \frac{\sin v \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos v}}{(1 + e \cos v)^2},$$

$$\tilde{h} = \frac{Pe}{1+e} \frac{1 - \cos v}{1 + e \cos v}.$$

Здесь  $e$  — эксцентриситет орбиты;  $\tilde{h}$  имеет смысл высоты спутника, отсчитанной от уровня перигея орбиты. Впрочем, явный вид периодических по  $v$  функций  $V_1$  и  $V_2$  нам не понадобится. Заметим лишь, что правые части уравнений (12.4.4) явно зависят от «времени»  $v$ , что, конечно, осложняет и без того не простые уравнения. Ведь эволюционные уравнения (12.4.4), описывающие влияние на спутник эффекта пропеллирования, существенно труднее для анализа, чем эволюционные уравнения в гравитационном поле (очерк шестой). В самом деле, там было всего два уравнения относительно углов ориентации вектора кинетического момента, а здесь — четыре. Добавочные уравнения описывают изменение модуля  $L$  вектора кинетического момента и угла  $\vartheta$  между ним и продольной осью спутника.

Тем знаменательней, что столь непростые, с явной зависимостью от времени в правых частях, уравнения (12.4.4) имеют, оказывается, два точных первых интеграла. Это позволяет провести эффективный качественный анализ поведения решения эволюционных уравнений. Вот эти первые интегралы:

$$L \sin \vartheta | \operatorname{ctg} \vartheta |^\alpha = l, \quad \alpha = \frac{a_1}{a_0 + a_1} < \frac{1}{2}, \quad (12.4.5)$$

$$| \operatorname{tg} \vartheta |^{2\alpha} | \cos \vartheta | \cos^2 \rho = c_\rho, \quad \cos \rho = -\sin \theta \sin \lambda. \quad (12.4.6)$$

Угол  $\rho$  представляет собой угол между  $L$  и нормалью к плоскости орбиты.

Интегральные кривые (12.4.5), (12.4.6) изображены на рис. 12.5, *a, б*. В реальном движении эти кривые могут полностью и не проходиться. Так как правые части дифференциальных уравнений (12.4.4) периодичны явно по  $v$

с периодом  $2\pi$ , то и их решение должно содержать периодическую составляющую примерно с таким же периодом. В результате в плоскостях  $\rho, \cos \vartheta$  и  $L, \cos \vartheta$  (рис. 12.5) изображающая точка колеблется вдоль интегральной кривой (12.4.5) и, соответственно, (12.4.6) с периодом,

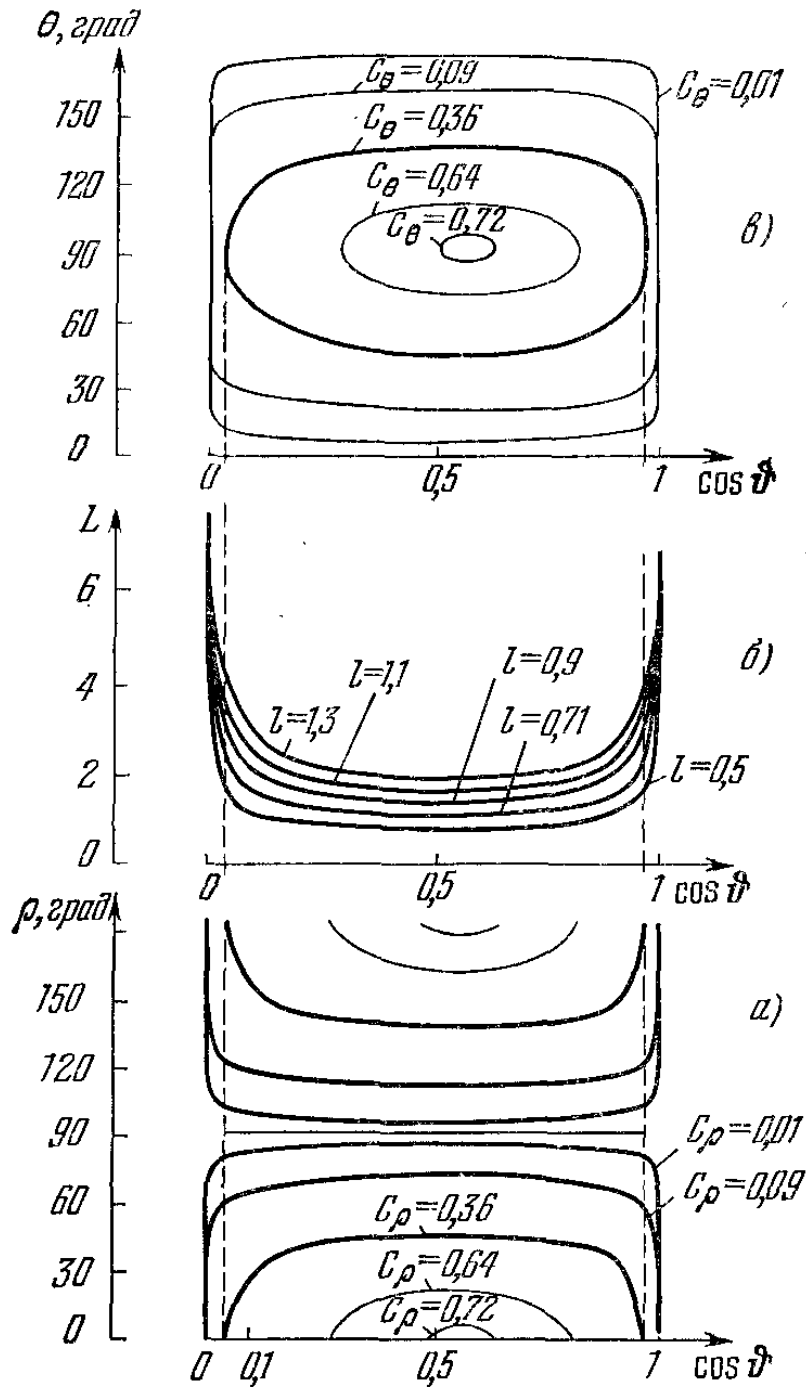


Рис. 12.5. Интегральные кривые.

примерно равным периоду  $T_v$  обращения спутника по орбите; эти колебания происходят с весьма небольшой амплитудой, заметая за период  $T_v$  очень маленький кусочек дуги интегральной кривой. При этом на круговой орбите продвижение изображающей точки «вперед» по интегральной кривой на первом полупериоде обращения спутника по орбите компенсируется таким же отступлением «назад»

по интегральной кривой на втором полупериоде, в результате изображающая точка колеблется около среднего неподвижного положения. Иначе говоря, переменные  $L$ ,  $\rho$ ,  $\vartheta$  будут колебаться (с малой амплитудой) около своих начальных значений, не изменяясь в среднем. Физически это легко объяснимо равноправием всех точек круговой орбиты; динамический напор набегающего потока одинаков в любой точке, поэтому возмущения в движении компенсируются в диаметрально противоположных точках орбиты.

Ведь вектор кинетического момента сохраняет за один орбитальный период направление в пространстве и, значит, меняет направление относительно набегающего потока. Максимальное различие между этими относительными направлениями как раз в диаметрально противоположных точках круговой орбиты. Грубо говоря, в одной точке орбиты «ветер дует» в одну сторону вертушки, а в противоположной точке — в противоположную.

Много ли тут раскрутишься?

Однако на эллиптической орбите дело обстоит по-другому. Динамический напор в перигее существенно больше, чем в апогее, поэтому возмущения движения в апогее не могут компенсировать возмущений в перигее. В результате возмущения понемногу накапливаются. На интегральных кривых (рис. 12.5) изображающие точки за один период  $T_v$  обращения спутника продвигаются «вперед» больше, чем отступают «назад», в результате чего через несколько периодов  $T_v$  обнаруживается существенная эволюция параметров  $L$ ,  $\rho$ ,  $\vartheta$ .

Из-за этого существенного изменения первоначальной ориентации набегающий поток в перигее меняет свое направление относительно спутника, что приводит в конце концов к эволюции параметров движения в обратном направлении, и т. д. В конечном счете эволюция параметров вращения и ориентации спутника будет носить на эллиптической орбите долгопериодический характер (с периодом в несколько десятков периодов обращения спутника по орбите).

На интегральных кривых рис. 12.5 в результате этого изображающие точки заматают более или менее существенный отрезок кривой, колеблясь вдоль этого отрезка долгопериодическим образом, причем эти долгопериодические колебания складываются из многих, нескомпенсированных полностью, короткопериодических (с орби-



тальным периодом). На рис. 12.5 выделены жирно участки интегральных кривых, проходимых в реальном движении.

Из рис. 12.5, б видно, что величина  $L$  может долгопериодическим образом изменяться в довольно широких пределах, что эквивалентно изменению угловой скорости собственной прецессии спутника. Она то увеличивается, когда составляющая пропеллирующего момента по вектору  $\mathbf{L}$  положительна в среднем, то уменьшается — при изменении ориентации пропеллирующего момента относительно вектора  $\mathbf{L}$ .

Одновременно меняется режим вращения спутника, характеризуемый величиной  $\vartheta$ . Спутник может переходить из режима кувыркания ( $\vartheta \approx \pi/2$ ) в режим закрутки ( $\vartheta \approx 0$ ) и обратно тоже долгопериодическим образом. При этом, как ясно из интегральной кривой (рис. 12.5, б), режим закрутки ( $\cos \vartheta \approx 1$ ) и режим кувыркания ( $\cos \vartheta \approx \approx 0$ ) сопровождаются максимальными значениями величины  $L$  кинетического момента, а переходный режим — минимальным значением величины  $L$ . Это полностью соответствует картине, найденной экспериментально и изображенной на рис. 12.2.

Можно выделить эволюцию движения в чистом виде, пренебрегая короткопериодическими колебаниями. С этой целью эволюционные уравнения (12.4.4) следует осреднить еще раз — по быстрой переменной  $\nu$ . Тогда

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_1 d\nu = \text{const} \neq 0,$$

но

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_2 d\nu = 0,$$

откуда немедленно следует, что

$$\lambda = \lambda_0 = \text{const} \quad (12.4.7)$$

в этом приближении. Значит, вектор  $\mathbf{L}$  не вращается вокруг направления скорости  $\mathbf{V}_\pi$  в перигее, а движется только в плоскости, содержащей  $\mathbf{V}_\pi$ . Иначе говоря, из двух углов, определяющих положение вектора  $\mathbf{L}$  в пространстве, меняется лишь один, а именно  $\theta$ . Учитывая (12.4.7), из (12.4.6) немедленно получаем этот первый

интеграл в новой форме:

$$|\operatorname{tg} \vartheta|^{2\alpha} |\cos \vartheta| \sin^2 \theta = c_{\theta}. \quad (12.4.8)$$

Интегральные кривые (12.4.8) также изображены на рис. 12.5, в. Из этих кривых видно, что если спутник периодически выходит из режима кувыркания  $\vartheta \approx \pi/2$  в режим осевого вращения  $\vartheta \approx 0$ , то это неизбежно должно сопровождаться колебаниями (с тем же периодом) ориентации вектора кинетического момента в диапазоне, почти равном  $180^\circ$ . Но это тоже соответствует экспериментально найденной картине пространственного движения вектора кинетического момента спутника «Протон-2» (рис. 12.3). Как мы помним, вектор кинетического момента «гуляет» от Северного полюса мира до Южного и обратно, в то время как осевой режим вращения сменяется режимом кувыркания и наоборот. Итак, качественное соответствие экспериментальных данных и изложенной траектории — налицо.

Требовать количественного соответствия в рамках изложенного нет смысла. Ведь мы не учли гравитационных моментов (они составляют у «Протонов» около 5% от аэродинамических моментов), диссипативных факторов, аэродинамики самого корпуса спутника, возможности «затемнения» корпусом лопастей и многих, многих других эффектов. Этими неучтенными факторами объясняется, например, «восьмеркообразный» след вектора кинетического момента на небесной сфере (рис. 12.3) — мы объяснили лишь 180-градусную амплитуду этой «восмерки».

Аккуратная постановка аэродинамической задачи должна учитывать характер взаимодействия молекул набегающего потока воздуха с поверхностью спутника; более того, пользуясь экспериментальными данными о движении спутников типа «Протон» вокруг центра масс, можно установить, каков этот самый характер взаимодействия [12.9].

Но здесь наша цель была гораздо более скромной — построить модель обнаруженных явлений, и мы в этом преуспели.

Отметим под конец, что из интегральных кривых следует наличие (в среднем по  $\nu$ ) устойчивой стационарной точки  $\theta^* = \frac{\pi}{2}$ ,  $\sin^2 \vartheta^* = 2\alpha$ . Если движение угодит

в эти начальные данные, (или близкие), то там и останется; при этом будет неизменной (но произвольной) и величина вектора кинетического момента  $L = L_0$ . Как уже упоминалось, для спутника «Протон» в нашей модели можно взять  $a_0 = 2a_1$ ; тогда  $\alpha = \frac{1}{3}$  и стационарное значение угла  $\vartheta^*$  определяется равенством

$$\cos \vartheta^* = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\vartheta^* \approx 54^\circ, 7).$$

При начальных данных, далеких от стационарной точки, движение будет глубокомодулированным (как мы уже знаем).

На рис. 12.6 изображены зависимости  $\theta(\nu)$ ,  $\vartheta(\nu)$ ,  $L(\nu)$ , полученные численным интегрированием уравнений (12.4.4). Чтобы подчеркнуть эффекты, было взято

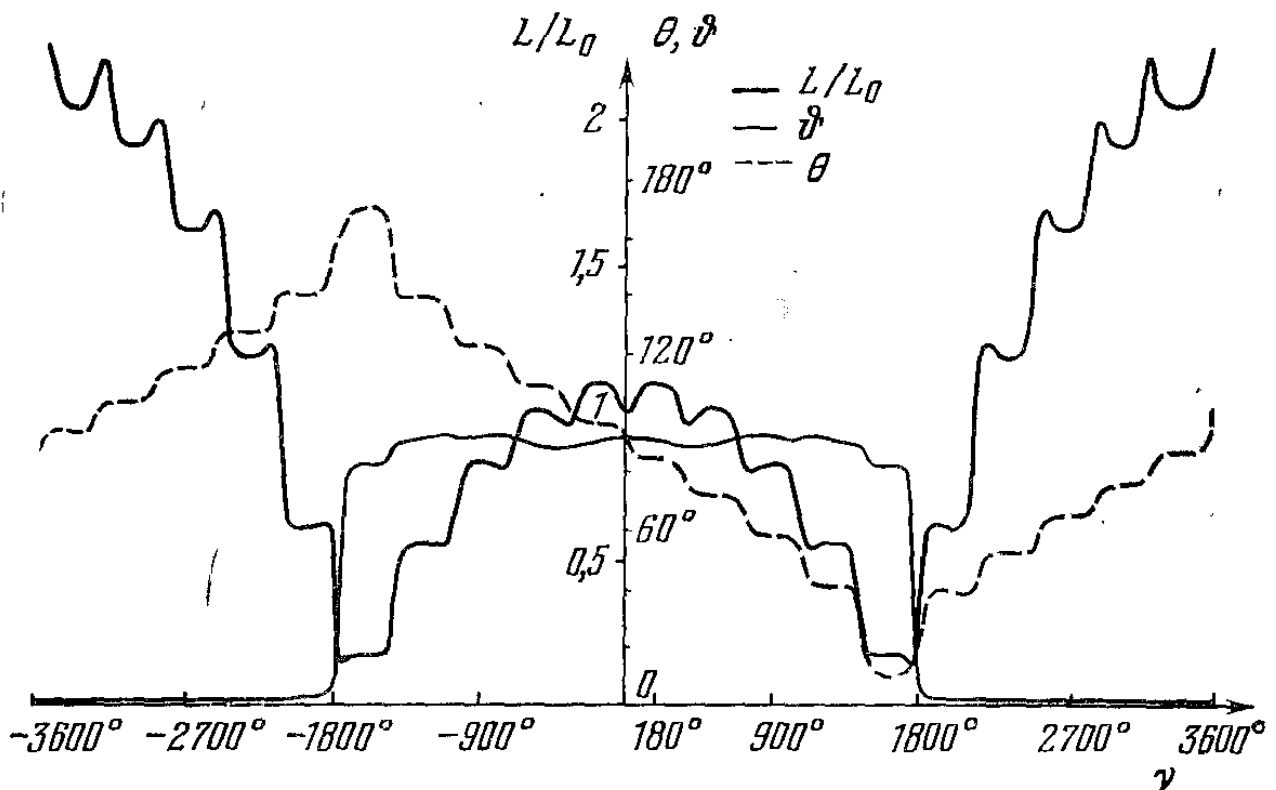


Рис. 12.6. Графики функций  $L(\nu)$ ,  $\theta(\nu)$ ,  $\vartheta(\nu)$ .

сильно завышенное значение для пропеллирующего момента — при этом четко видны короткопериодические колебания, наложенные на долгопериодическую эволюцию. Что касается этой долгопериодической эволюции, то она, конечно, обладает всеми уже обследованными выше свойствами.

Автор нарочно для заключительного очерка выбрал задачу, которая была бы немыслима в старой, допутниковой, механике, и с тем говорит читателю: до свидания.

*Знаю, что смертен, что век мой не долог, и все же — когда я  
Сложный исследую ход круговращения звезд,  
Мнится, земли не касаюсь ногами, но гостем Зевеса  
В небе амвросией я, пищей бессмертных, кормлюсь.*

*Птолемей*



# ЛИТЕРАТУРА

## К очерку первому

- 1.1. Д у б о ш и н Г. Н., Небесная механика. Основные задачи и методы. Изд-во «Наука», М., 1968.
- 1.2. Ш к л о в с к и й И. С., Вселенная. Жизнь. Разум. Изд. 2-е, изд-во «Наука», М., 1965.
- 1.3. Б е р е з к и н Е. Н., Лекции по теоретической механике, ч. I. Изд-во МГУ, 1967.
- 1.4. Л у р ь е А. И., Аналитическая механика. Физматгиз, М., 1961.
- 1.5. П у а н к а р е А., Новые методы небесной механики. Избранные труды в трех томах. Том I, изд-во «Наука», 1971.
- 1.6. Б о г о л ю б о в Н. Н., М и т р о п о л ь с к и й Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Изд. 3-е, Физматгиз, М., 1963.
- 1.7. В о л о с о в В. М., Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений. Успехи матем. наук, т. 17, № 6 (108), 1962.
- 1.8. М о и с е е в Н. Н., Асимптотические методы нелинейной механики. Изд-во «Наука», 1969.
- 1.9. А р н о л ь д В. И., Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. Успехи матем. наук, т. 18, № 5 (113), 1963.
- 1.10. А р н о л ь д В. И., Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. Успехи матем. наук, т. 18, № 6 (114), 1963.
- 1.11. Д е м и н В. Г., Судьба Солнечной системы. Изд-во «Наука», М., 1969.
- 1.12. О х о ц и м с к и й Д. Е., Э н е е в Т. М., Т а р а т ы н о в а Г. П., Определение времени существования искусственного спутника Земли и исследование вековых возмущений его орбиты. Успехи физ. наук, т. 63, № 1а, 1957.
- 1.13. О х о ц и м с к и й Д. Е., Динамика космических полетов. Конспект лекций. Изд-во МГУ, 1968.
- 1.14. Э л ь я с б е р г П. Е., Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. Изд-во «Наука», М., 1965.
- 1.15. Б а л к М. Б., Элементы динамики космического полета. Изд-во «Наука», М., 1965.

- 1.16. Б е л е ц к и й В. В., Орбита экваториального спутника Земли. Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 13, 1962.
- 1.17. Б е л е ц к и й В. В., Движение искусственного спутника относительно центра масс. Изд-во «Наука», М., 1965.
- 1.18. Б е л е ц к и й В. В., О либрации спутника. Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 3, 1959.
- 1.19. С е д о в Л. И., Динамические эффекты в движении искусственных спутников Земли. Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 2, 1958.

#### К очерку второму

- 2.1. А к с е н о в Е. П., Г р е б е н и к о в Е. А., Д е м и н В. Г., Общее решение задачи о движении искусственного спутника в нормальном поле притяжения Земли. Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 8, 1961.
- 2.2. Б р а у э р Д., К л е м е н с Дж., Методы небесной механики. Изд-во «Мир», М., 1964.
- 2.3. Д е м и н В. Г., Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения. Изд-во «Наука», М., 1968.
- 2.4. Д у б о ш и н Г. Н., Небесная механика. Аналитические и качественные методы. Изд-во «Наука», М., 1964.
- 2.5. К и с л и к М. Д., Движение искусственного спутника в нормальном гравитационном поле Земли. Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 4, 1960.
- 2.6. V i n t i J. P., Theory of an accurate intermediary orbit for satellite astronomy. J. Res. Nat. Bur. Standards, v. 63B, № 3, 1959.
- 2.7. А л е к с е е в В. М., Обобщенная пространственная задача двух неподвижных центров. Классификация движений. Бюлл. Ин-та теор. астроном., т. 10, № 4 (117), 1965.
- 2.8. Л у р ь е А. И., Аналитическая механика. Физматгиз, М., 1961.
- 2.9. Д у б о ш и н Г. Н., Небесная механика. Основные задачи и методы. Изд-во «Наука», 1968.

#### К очерку третьему

- 3.1. Б е л е ц к и й В. В., О траекториях космических полетов с постоянным вектором реактивного ускорения. Космич. исследования, т. 2, № 3, 1964.
- 3.2. Б е л е ц к и й В. В., Описание плоских траекторий космических полетов с постоянным вектором реактивного ускорения. Труды конференции по общим и прикладным вопросам небесной механики, Москва, 1967, изд-во «Наука», 1972.
- 3.3. N i t ā М. М., Über die Bewegung der Rakete in einen Zentralkraftfeld. Revue de Mecanique, Applique, v. 6, № 2, 1961.
- 3.4. Д е м и н В. Г., Об одном способе исследования движения космического аппарата в сфере действия планеты. Труды Ун-та дружбы народов им. Патриса Лумумбы, сер. теор. мех., т. 17, вып. 4, 1966.
- 3.5. К у н и ц ы н А. Л., О движении ракеты в центральном поле сил с постоянным вектором реактивного ускорения. Космич. исследования, т. 4, № 2, 1966.

- 3.6. К о п н и н Ю. М., Эволюция орбиты спутника под влиянием малой возмущающей силы, постоянной по величине и направлению. Инженерный ж., т. 5, № 6, 1965.
- 3.7. Ч е р н и к о в Ю. А., Эволюция финитных планетоцентрических орбит малых тел под влиянием прямого светового давления. Космич. исследования, т. 6, № 6, 1968.
- 3.8. Л и д о в М. Л., Вековые эффекты эволюции орбит под влиянием светового давления. Космич. исследования, т. 7, № 4, 1969.
- 3.9. М а р ш а к С. Я., Сундук. Норвежская народная сказка, Собр. соч., т. 1, 1957.

#### К очерку четвертому

- 4.1. Д у б о ш и н Г. Н., Небесная механика. Основные задачи и методы. Изд-во «Наука», М., 1968.
- 4.2. М о и с е е в Н. Д., Труды ГАИШ, вып. 15, 1945.
- 4.3. Л и д о в М. Л., О приближенном анализе эволюции орбит искусственных спутников. Сб. «Проблемы движения искусственных небесных тел», Изд-во АН СССР, М., 1963.
- 4.4. Л и д о в М. Л., Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних сил. Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 8, 1961.
- 4.5. Д е м и н В. Г., Судьба Солнечной системы. Изд-во «Наука», М., 1969.
- 4.6. Ч е б о т а р е в Г. А., Аналитические и численные методы небесной механики. Изд-во «Наука», М., 1965.
- 4.7. К и с л и к М. Д., Сферы влияния больших планет и Луны. Космич. исследования, т. 2, № 6, 1964.
- 4.8. А р н о л ь д В. И., Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. Успехи матем. наук, т. 18, № 5 (113), 1963.
- 4.9. А р н о л ь д В. И., Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. Успехи матем. наук, т. 18, № 6 (114), 1963.
- 4.10. М о л ч а н о в А. М., The Resonant structure of the solar system. ICARUS — Intern. J. of the Solar System, v. 8, № 2, 1968.
- 4.11. Б р ю н о А. Д., Неустойчивость в системах Гамильтона и распределение астероидов. Математический сборник, т. 83 (125), вып. 2 (10), 1970.
- 4.12. В г о w e r D., The problem of the Kirkwood Gaps in the asteroid belt. Astron. J., v. 68, № 3, 1963.
- 4.13. Р ж и г а О. Н., Результаты радиолокации планет. Космич. исследования, т. 7, № 1, 1969.
- 4.14. Ч е т а е в Н. Г., Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. Изд-во АН СССР, М., 1962.
- 4.15. Ф е й н м а н Р. и др., Фейнмановские лекции по физике, т. 9. Изд-во «Мир», М., 1967.
- 4.16. Р у м я н ц е в В. В., Метод функций Ляпунова в теории устойчивости движений. Сб. «Механика в СССР за 50 лет», т. I, изд-во «Наука», М., 1968.
- 4.17. И ш л и н с к и й А. Ю., Механика. В кн. «Октябрь и научный прогресс», т. 1, Изд. АПН, М., 1967.

## К очерку пятому

- 5.1. Е г о р о в В. А., О некоторых задачах динамики полета к Луне. Успехи физ. наук, т. 63, вып. 1а, 1957.
- 5.2. Е г о р о в В. А., Пространственная задача достижения Луны. Изд-во «Наука», М., 1965.
- 5.3. Л е в а н т о в с к и й В. И., Ракетой к Луне. Физматгиз, М., 1960.
- 5.4. Л е о н т о в и ч А. М., Об устойчивости лагранжевых периодических решений ограниченной задачи трех тел. Докл. АН СССР, т. 142, № 3, 1962.
- 5.5. D e r p r i t A., D e r p r i t - B a r t h o l o m e A., Stability of the triangular Lagrangian points. Astron. J., v. 72, № 2, 1967.
- 5.6. М а р к е е в А. П., Об устойчивости треугольных точек либрации в круговой ограниченной задаче трех тел. Прикл. матем. и мех., т. 33, № 1, 1969.
- 5.7. О х о ц и м с к и й Д. Е., Л и д о в М. Л., Т е с л е н - к о Н. А., Исследование одного класса траекторий ограниченной задачи трех тел. Космич. исследования, т. 2, № 6, 1964.
- 5.8. Л е в а н т о в с к и й В. И., Механика космического полета в элементарном изложении. Изд-во «Наука», М., 1970.
- 5.9. С е д о в Л. И., Орбиты космических ракет в сторону Луны. Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 5, 1960.

## К очерку шестому

- 6.1. Б е л е ц к и й В. В., Движение искусственного спутника относительно центра масс. Изд-во «Наука», М., 1965.
- 6.2. G o l d r e i c h P., P e a l e S. J., The dynamics of planetary rotations. Annual Review of Astronomy and Astrophysics, v. 6, Palo Alto, Calif., USA, 1968.
- 6.2'. Экспресс-информация «Астронавтика и ракетодинамика», № 12, 1972.
- 6.3. Б е л е ц к и й В. В., О либрации спутника. Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 3, 1959.
- 6.4. Р у м я н ц е в В. В., Об устойчивости стационарных движений спутников. ВЦ АН СССР, М., 1967.
- 6.5. \*) S t ü m p k e H., Professor, Bau und Leben der Rhinogradentia mit einem Nachwort von Gerolf Steiner. Gustav Fischer Verlag, Stuttgart, 1967.
- 6.6. \*) Ш т ю м п к е Х., Строеие и жизнь ринограденций. Наука и жизнь, № 4, 1963.
- 6.7. Д е Б р а Д. Б., Принципы работы пассивных систем стабилизации и основные направления исследований. Сб. «Современное состояние механики космического полета», под ред. П. Б. Рипардса, перев. с англ., изд-во «Наука», М., 1969.

---

\*) Существование литературы о ринограденциях не является достаточным условием существования ринограденций.



- 6.8. Проблемы ориентаций искусственных спутников Земли. Под ред. С. Ф. Сингера, изд-во «Наука», М., 1966.
- 6.9. С а р ы ч е в В. А., Исследование динамики системы гравитационной стабилизации. Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 16, 1963.
- 6.10. B r e a k w e l l J. V., P r i n g l e R., Nonlinear resonances affecting gravity-gradient stability. XV International Congr. IAF, Athen, 1965.
- 6.11. Д у б о ш и н Г. Н., Небесная механика. Основные задачи и методы. Изд-во «Наука», М., 1968.
- 6.12. К а н е Т. R., Attitude stability of Earth-pointing satellites. AIAA J., v. 3, № 4, 1965.
- 6.13. Х а з и н Л. Г. Об устойчивости гамильтоновых систем при наличии резонансов. Прикл. матем. и мех., т. 35, № 3, 1971.
- 6.14. Б е л е ц к и й В. В., О законах Кассини. Препринт № 79, Ин-т прикл. матем. АН СССР, 1971.
- 6.15. Б е л е ц к и й В. В., Эволюция вращения динамически-симметричного спутника. Космич. исследования, т. 1, № 3, 1963.
- 6.16. Б е л е ц к и й В. В., Движение искусственного спутника Земли относительно центра масс. Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 1, 1958.
- 6.17. Ч е р н о у с ь к о Ф. Л., О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов. Прикл. матем. и мех., т. 27, № 3, 1963.
- 6.18. И ш л и н с к и й А. Ю., Механика. В кн. «Октябрь и научный прогресс», т. 1, Изд. АПН, М., 1967.
- 6.19. Б е л е ц к и й В. В., Классификация движений искусственного спутника Земли около центра масс. Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 6, 1961.
- 6.20. Т р у ш и н С. И., Об учете движения перигея орбиты в задаче о вращении и ориентации ИСЗ. Космич. исследования, т. 8, № 4, 1970.
- 6.21. H o l l a n d R. L. and S p e r l i n g H. J., A first-order theory for the rotational motion of a triaxial rigid body orbiting and oblate primary. Astron. J., v. 74, № 3, 1969.
- 6.22. Ч е р н о у с ь к о Ф. Л., Резонансные явления при движении спутника относительно центра масс. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., т. 3, № 3, 1963.
- 6.23. L u t z e F. H., A b b i t t M. W., Rotation locks for near-symmetrics satellites. Celest. Mech., № 1, 1969.
- 6.24а. Т о р ж е в с к и й А. П., Быстрое вращение искусственного спутника вокруг центра масс в резонансном режиме. Космич. исследования, т. 6, вып. 1, 1968.
- 6.24б. Т о р ж е в с к и й А. П., Движение искусственного спутника относительно центра масс и резонансы. Astronautica Acta, v. 14, № 3, 1969.
- 6.25. М а р к е е в А. П., Исследование устойчивости движения в некоторых задачах небесной механики. Препринт, Ин-т прикл. матем. АН СССР, М., 1970.

- 6.26. Р ж и г а О. Н., Результаты радиолокации планет. Космич. исследования, т. 7, № 1, 1969.
- 6.27. P e t t e n g i l l G. H., D y c e R. B., A radar determination of the rotation of the planet Mercury. Nature, № 206, 1965, p. 1240.
- 6.28. D y c e R. B., P e t t e n g i l l G. H., S h a p i r o I. I., Astron. J., v. 72, 1967, p. 351.
- 6.29. C o l o m b o G., Rotational period of the planet Mercury. Nature, № 208, p. 575, 1965.
- 6.30. К о н а ш е н о к В. Н., К о н д р а т ь е в К. Я., Новое о Венере и Марсе. Гидрометеиздат, Л., 1970.
- 6.31. К о т е л ь н и к о в В. А. и др., Радиолокационные наблюдения Венеры в Советском Союзе в 1964 г. Докл. АН СССР, т. 163, вып. 1, 1965.
- 6.32. C a r p e n t e r R. L., Study of Venus by cw radar — 1964 results. Astron. J., v. 71, p. 142, 1966.
- 6.33. C o l d s t e i n R. M., Moon and Planets. North-Holland, Amsterdam, 1967.
- 6.34. О х о ц и м с к и й Д. Е., С а р ы ч е в В. А., Система гравитационной стабилизации искусственных спутников. Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 16, 1963.

#### К очерку седьмому

- 7.1. Г р о д з о в с к и й Г. Л., И в а н о в Ю. Н., Т о к а р е в В. В., Механика космического полета с малой тягой. Изд-во «Наука», М., 1966.
- 7.2. Б е л е ц к и й В. В., Е г о р о в В. А., Разгон космического аппарата в сфере действия планеты. Космич. исследования, т. 2, № 3, 1964.
- 7.3. О х о ц и м с к и й Д. Е., Исследование движения в центральном поле под действием постоянного касательного ускорения. Космич. исследования, т. 2, № 6, 1964.
- 7.4. Е в т у ш е н к о Ю. Г., Влияние касательного ускорения на движение спутника. Прикл. матем. и мех., т. 30, № 3, 1966.
- 7.5. Е ф и м о в Г. Б., Оптимальный разгон в центральном поле до гиперболических скоростей. Космич. исследования, т. 7, № 1, 1970.

#### К очерку восьмому

- 8.1. К л а р к А., Солнечный ветер. Библиотека современной фантастики, т. 6, изд-во «Молодая гвардия», М., 1966.
- 8.2. Г р о д з о в с к и й Г. Л., И в а н о в Ю. Н., Т о к а р е в В. В., Механика космического полета с малой тягой. Изд-во «Наука», М., 1966.
- 8.3. С к о п ц о в А. П., Вариационная задача о выходе космического аппарата с солнечным парусом из сферы притяжения планеты. Сб. «Проблемы механики управляемого движения», вып. 1, Пермь, 1972.

- 8.4. Б е л е ц к и й В. В., О траекториях космических полетов с постоянным вектором реактивного ускорения. Космич. исследования, т. 2, № 3, 1964.
- 8.5. Б е л е ц к и й В. В., Описание плоских траекторий космических полетов с постоянным вектором реактивного ускорения. Труды конференции по общим и прикладным вопросам небесной механики, Москва, 1964.

#### К очерку девятому

- 9.1. Б е л е ц к и й В. В., Г и в е р ц М. Е., О движении пульсирующей системы в гравитационном поле. Космич. исследования, т. 5, № 6, 1967.
- 9.2. Б е л е ц к и й В. В., Гравилет. Техника—молодежи, № 3, 1970.
- 9.3. Б е л е ц к и й В. В., Движение искусственного спутника относительно центра масс. Изд-во «Наука», 1965.
- 9.4. Д о н о в А. Е., Теория полета гравитолета. Космич. исследования, т. 9, № 3, 1971.

#### К очерку десятому

- 10.1. Б е л е ц к и й В. В., Е г о р о в В. А., Межпланетные полеты с двигателями постоянной мощности. Космич. исследования, т. 2, № 3, 1964.
- 10.2. Б е л е ц к и й В. В., Е г о р о в В. А., Е р ш о в В. Г., Анализ траекторий межпланетных полетов с двигателями постоянной мощности. Космич. исследования, т. 3, № 4, 1965.
- 10.3. Б е л е ц к и й В. В., Г о л у б к о в В. В., Е г о р о в В. А., Е р ш о в В. Г., Исследование траекторий полета с малой тягой. Второй Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов, Академия наук СССР, Москва, 1964.
- 10.4. Г р о д з о в с к и й Г. Л., И в а н о в Ю. Н., Т о к а р е в В. В., Механика космического полета с малой тягой. Изд-во «Наука», 1966.
- 10.5. П о н т р я г и н Л. С., Б о л т я н с к и й В. Г., Г а м к р е л и д з е Р. В., М и щ е н к о Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов. Изд. 2-е, изд-во «Наука», 1969.
- 10.6. Б о л т я н с к и й В. Г., Математические методы оптимального управления. Изд. 2-е, изд-во «Наука», 1969.
- 10.7. M e l b o u r n e W. G., S a u e r C. G., Optimum interplanetary rendez vous with power-limited vehicles. AIAA J., v. 1, № 1, 1963.
- 10.8. П л а т о н о в А. К., Оптимальные свойства корректирующих маневров при использовании двигателя с ограниченной тягой. Космич. исследования, т. 5, № 2, 1967.

- 10.9. Гродзовский Г. Л., Охоцимский Д. Е., Белецкий В. В., Иванов Ю. Н., Курьянов А. И., Платонов А. К., Сарычев В. А., Токарев В. В., Ярошевский В. А., Механика космического полета. Сб. «Механика в СССР за 50 лет», т. I, изд-во «Наука», 1968.

#### К очерку одиннадцатому

- 11.1. Белецкий В. В., Новикова Е. Т., Об относительном движении связки двух тел на орбите. Космич. исследования, т. 7, № 3, 1969.
- 11.2. Белецкий В. В., Об относительном движении связки двух тел на орбите, II. Космич. исследования, т. 7, № 6, 1969.
- 11.3. Белецкий В. В., Егоров В. А., Межпланетные полеты с двигателями постоянной мощности. Космич. исследования, т. 2, № 3, 1964.
- 11.4. Беляев П. И., Леонов А. А., В открытом космосе. Газета «Правда» от 14 апреля 1965 г.
- 11.5. Егоров В. А., Некоторые вопросы оптимизации траекторий зондирования межпланетного пространства. Автоматика и телемеханика, № 5, 1970.

#### К очерку двенадцатому

- 12.1. Аким Э. Л., Энеев Т. М., Определение параметров движения космического летательного аппарата по данным траекторных измерений. Космич. исследования, т. 1, № 1, 1963.
- 12.2. Аким Э. Л., Определение поля тяготения Луны по движению искусственного спутника Луны «Луна-10». Космич. исследования, т. 4, № 6, 1966.
- 12.3. Белецкий В. В., Зонов Ю. В., Вращение и ориентация третьего советского спутника. Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 7, 1961.
- 12.4. Белецкий В. В., Голубков В. В., Степанова Е. А., Хацкевич И. Г., Определение ориентации искусственных спутников по данным измерений. Препринт, Ин-т прикл. матем. АН СССР. Часть I.— Метод. М., 1967. Часть II.— Результаты. Анализ движения. М., 1968.
- 12.5. Белецкий В. В., Голубков В. В., Лавровский Э. К., Трушин С. И., Хацкевич И. Г., Определение ориентации и вращения искусственных спутников по данным измерений. Космич. исследования, т. 5, № 5, 1967.
- 12.6. Белецкий В. В., Голубков В. В., Хацкевич И. Г., Анализ вращения и ориентации спутника «Протон-2». Proc. XVIII International Astronautical Congress, Belgrad, 1967, Pergamon Press, 1968.

- 12.7. Г о л у б к о в В. В., Х а ц к е в и ч И. Г., Определе-  
ние ориентации искусственных спутников Земли по задан-  
ной системе измерений. Космич. исследования, т. 7, № 4,  
1969.
- 12.8. Б е л е ц к и й В. В., Г о л у б к о в В. В., С т е п а н о -  
в а Е. А., Х а ц к е в и ч И. Г., Результаты определения  
ориентации спутника «Протон-2» и описание его движения  
относительно центра масс. Космич. исследования, т. 7, № 4,  
1969.
- 12.9. Б е л е ц к и й В. В., Оценка характера взаимодействия  
зародинамического потока со спутником по анализу движе-  
ния спутника «Протон-2» относительно центра масс. Космич.  
исследования, т. 8, № 2, 1970.
- 12.10. Э н е в Т. М., П л а т о н о в А. К., К а з а к о в а Р. К.,  
Определение параметров орбиты искусственного спутника по  
данным наземных измерений. Сб. «Искусственные спутники  
Земли», вып. 4, 1960.
- 12.11. Б е л е ц к и й В. В., Движение искусственного спутника  
относительно центра масс. Изд-во «Наука», 1965.

- Аббит (Abbitt M. W.) 198  
 Аким Э. Л. 332  
 Аксенов Е. П. 59, 64, 65, 74  
 Алексеев В. М. 65  
 Арнольд В. И. 47, 111, 124—126, 129, 140, 154  
 Балк М. Б. 56  
 Белецкий В. В. 33, 38, 81, 87, 160, 165, 166, 170, 172, 179, 182, 183, 192—194, 206, 210, 238, 244, 245, 257, 267, 274—276, 279, 288, 290, 298, 310, 320, 334, 335  
 Беляев П. 306  
 Березкин Е. Н. 16  
 Биркгоф Дж. (Birkhoff G.) 129  
 Блехман И. И. 134  
 Боголюбов Н. Н. 30  
 Болтянский В. Г. 261  
 Брауэр Д. (Brower D.) 59, 136  
 Брюно А. Д. 134  
 Брэкуэлл Дж. (Breakwell J. V.) 173  
 Винти Дж. (Vinti J. P.) 59, 64  
 Волосов В. М. 30  
 Гамкрелидзе Р. В. 261  
 Гиверц М. Е. 244  
 Голдрейх (Goldreich P.) 165, 171, 198, 199, 202  
 Голдстейн (Goldstein R. L.) 201  
 Голубев В. В. 9  
 Голубков В. В. 257, 276, 279, 284, 288, 290, 332  
 Гребеников Е. А. 59, 64, 74  
 Гродзовский Г. Л. 227, 257, 276, 294  
 Дайс (Dyce R. B.) 199, 200  
 Де Бра Д. Б. (De Bra D. B.) 171  
 Девянин Е. А. 325  
 Демин В. Г. 47, 59, 64, 74, 79, 119  
 Депри (Deprit A.) 154  
 Депри-Бартоломе (Deprit-Bartholome A.) 154  
 Донов А. Е. 254  
 Дубошин Г. Н. 16, 18, 28, 32, 48, 59, 67, 106, 108, 174  
 Евтушенко Ю. Г. 220, 222  
 Егоров В. А. 147, 155, 156, 157, 159, 206, 210, 257, 267, 274—276, 279, 288, 290, 309  
 Ершов В. Г. 257, 276, 288, 290  
 Ефимов Г. Б. 220  
 Зауэр (Sauer C. G.) 292  
 Зигель К. Л. (Siegel K. L.) 129  
 Зонов Ю. В. 332  
 Иванов Ю. Н. 227, 257, 276, 294  
 Ишлинский А. Ю. 118, 171  
 Казакова Р. К. 332  
 Карпентер (Carpenter R. L.) 201  
 Кеплер И. (Kepler I.) 13  
 Кислик М. Д. 59, 64, 123  
 Кларк А. (Clarke A. C.) 225, 231, 232, 234  
 Клеменс Дж. (Clemence G.) 59  
 Колмогоров А. Н. 124—126, 129  
 Коломбо Дж. (Colombo G.) 200  
 Конашенков В. Н. 201  
 Кондратьев К. Я. 201  
 Копнин Ю. М. 81, 96  
 Космодемьянский А. А. 9  
 Котельников В. А. 201  
 Крылов Н. М. 30  
 Куницын А. Л. 81  
 Кэйн Т. Р. (Kane T. R.) 176  
 Лавровский Э. К. 332  
 Лагранж (Lagrange J. L.) 22, 80, 165  
 Лаплас (Laplace P. S.) 157  
 Левантовский В. И. 147, 159

- Леонов А. 306  
Леонтович А. М. 154  
Лидов М. Л. 99, 103, 117, 118, 157  
Лурье А. И. 28, 67  
Лутц (Lutze F. H.) 198  
Ляпунов А. М. 139, 140, 141, 143, 172
- Маркеев А. П. 154, 199  
Маршак С. Я. 81  
Мельбурн (Melbourn W. G.) 292  
Меус 102  
Мещерский И. В. 80  
Митропольский Ю. А. 30  
Мищенко Е. Ф. 261  
Мозер Ю. (Moser J.) 129  
Моисеев Н. Д. 22, 117  
Моисеев Н. Н. 47  
Молчанов А. М. 130, 132, 134
- Нехорошев Н. И. 127  
Нитца (Nitā M. M.) 81  
Новикова Е. Т. 298, 311, 325  
Ньютон И. (Newton I.) 11, 13
- Охоцимский Д. Е. 55, 56, 157, 171, 214, 215, 217
- Петтенгил Дж. (Pettengill G. H.) 199, 200  
Пиэл С. (Peale S. J.) 165, 171, 198, 199, 202  
Платонов А. К. 294, 296, 332  
Понтрягин Л. С. 261  
Прингл Р. (Pringle R.) 173  
Птолемей 15, 344  
Пуанкаре А. (Poincaré H.) 30, 129
- Ржига О. Н. 136  
Румянцев В. В. 146, 168
- Сарычев В. А. 171  
Седов Л. И. 56, 159  
Селерье 80  
Сен-Жермен 80  
Скиапарелли (Sciaparelli) 200, 201  
Скопцов А. П. 227, 230  
Солоненко В. П. 254  
Сперлинг (Sperling H. J.) 194  
Степанова Е. А. 332, 335
- Таратынова Г. П. 55  
Тесленко Н. А. 157  
Токарев В. В. 227, 257, 276, 294  
Торжевский А. П. 199  
Трушин С. И. 189, 332
- Фейнман Р. (Feinman R.) 146
- Хазин Л. Г. 179  
Хацкевич И. Г. 332, 335  
Холланд (Holland R. L.) 194
- Чеботарев Г. А. 122  
Черников Ю. А. 99, 102  
Черноусько Ф. Л. 186, 189, 194, 198  
Четаев Н. Г. 9, 141, 143—145
- Шапиро (Shapiro I. I.) 200  
Шкловский И. С. 15  
Штюмпке (Stümpke H.) 170
- Эйлер Л. (Euler L.) 57  
Эльясберг П. Е. 56  
Энеев Т. М. 55, 266, 332

- Алгоритм статистической обработки информации 330
- Амплитуда (функция) 75
- Амплитудно-фазовая траектория 39
- Аномалия истинная 17  
— эксцентрическая 17
- Апогей 16
- Аргумент перигея 20  
— широты 20
- Арнольда теорема 126—129
- Асимптотические методы нелинейной механики 30, 33, 44
- Асимптотическое решение 35
- Бесселя функции 39
- Быстрые вращения 179 и д.  
— переменные 32
- Вековые возмущения 26, 28
- Вектор Лапласа 19  
— управления 260
- Возмущенное движение 21
- Вращение Венеры 201  
— Луны 163, 198  
— Меркурия 198, 199  
— спутника 160 и д., 327 и д.  
— — быстрое 180  
— типа лунного 198  
— — Меркурия 198—201
- Вырождение предельное 126  
— собственное 126
- Гамильтона уравнения 67  
— функция 46, 67, 107
- Гамильтона — Якоби уравнение 67, 143
- Гипотеза Молчанова 130
- Гравилёт 248
- Гравитационная стабилизация 171
- Гравитационный потенциал 160 и д.
- Главные центральные оси инерции 163
- Давление световое 81, 98, 225
- Дальность угловая 280
- Датчики ориентации 328
- Двигатели малой тяги — см. *Полет с малой тягой*
- Движение в окрестности спутника 277  
— возмущенное 21, 139  
— вращательное — см. *Вращение*  
— кеплеровское 15  
— космонавта относительно спутника 303  
— лагранжево планет 141  
— невозмущенное 20, 139  
— относительное 276 и д., 297 и д.  
— среднее 18  
— условно-периодическое 125  
— центра масс связки 299  
— Эйлера — Пуансо 180
- Делоне элементы 32, 107
- Дельта амплитуды 75
- Долгота восходящего узла 19
- Задача двух неподвижных центров 57  
— — — обобщенная 65  
— ограниченная движения относительно центра масс 301  
— оптимального управления 260  
— трех тел ограниченная 59, 113, 147  
— — — круговая 147  
—  $n$  тел 104
- Закон площадей 17  
— сохранения энергии 18  
— тяготения ньютоновский 11
- Законы Кассини 164



Звезды кратные 15, 120  
Зона резонансная 197  
— срыва 315 и д.  
Зонд космический возвратный  
309

Импульсы обобщенные 67  
Интеграл Лапласа (обобщенный)  
83  
— Лежандра первого рода нор-  
мальный эллиптический 74  
— площадей 17, 83  
— полный эллиптический пер-  
вого рода 74  
— энергии 18, 83  
— Якоби 150  
Истинная аномалия 17

Кассини законы 164  
Кеплера уравнение 17  
Кеплерова орбита 16  
Колебания спутника 33  
— — нелинейные 172  
Коррекция межпланетных тра-  
екторий 294  
Косинус эллиптический 75

Лагранжа треугольные точки  
либрации 153  
— уравнения первого рода 298  
Лагранжево движение планет  
111  
Лапласа теорема 47, 104, 109,  
129  
Лежандра интеграл первого рода  
нормальный эллиптический 74  
— полиномы 52  
Линия узлов 19, 111  
Ляпунова функция 141

Медленные переменные 32  
Метод наименьших квадратов  
330  
— осреднения 44, 50, 51  
— точечных отображений 318  
— транспортирующей траекто-  
рии 266, 281, 288  
Методы асимптотические нели-  
нейной механики 30, 33, 44  
Модуль эллиптического интеграла  
74  
Молчанова гипотеза 130  
Моменты инерции главные цент-  
ральные 163

Наклонение 19  
Невозмущенное движение 20  
Нелинейные колебания 172  
Неправильная система 142

Область маловозмущенного дви-  
жения 120  
Ограничения 260, 264, 265  
Оптимизация 260 и д.  
Орбита кеплерова 16  
Оси инерции главные централь-  
ные 163  
Оскулирующая орбита 21  
— — экваториального спутни-  
ка 22  
Оскулирующие элемента 21  
Осреднение 36, 50, 51  
— канонических уравнений 45  
Относительное движение 276 и д.  
Отображение точечное 318

Парадокс разгона с малой тягой  
208  
— спутника аэродинамический  
56, 209

Параметр фокальный 16  
Параметрический резонанс 37  
Парус солнечный 225—242  
— — наилучшей конструкции  
227

Переменная быстрая 32  
— медленная 32  
Перигей 16  
Планета искусственная 309  
Плоскость фазовая 316  
Поверхность Хилла 150  
Полет к Луне 147 и д.  
— ракеты оптимальный 262  
— с малой тягой 80, 203 и д.  
— — — — к Венере 283, 290,  
291  
— — — — к Марсу 280—293  
— — — — к Юпитеру 290, 291  
— — — — между орбитами  
планет 256 и д.  
— — — — с возвращением 288

Полиномы Лежандра 52  
Полуось большая 17  
Портрет фазовый 196, 316  
Порядок резонанса 49  
Постоянная тяготения универ-  
сальная 11  
Правильная система 142  
Предельное вырождение 126

- Прецессия орбиты спутника 55  
— спутника регулярная 181  
Принцип максимума Понтрягина 261, 295  
Производные изохронные кеплеровского движения 277  
Пропеллирующий эффект 335  
«Протон» 327—332, 335, 342  
Пуавкаре уравнение в вариациях 144
- Равновесие относительное в гравитационном поле 164, 165 и д.  
Радиолокация Венеры 201  
Разгон с малой тягой 205 и д.  
— — — — монотонный 214  
Резонанс 37, 48, 49  
— параметрический 37  
Резонансная зона 197  
Резонансность 126  
— вращений Луны, Венеры, Меркурия 136—138  
— систем спутников Юпитера, Сатурна, Урана 132, 133  
— Солнечной системы 130  
Решение асимптотическое 35  
Рипограденция 170  
Ряд Фурье 49
- Сближение космических объектов 277  
Связка двух тел на орбите 298, 311  
— четырех тел на орбите 325  
Сепаратриса 316  
Сжатие Земли 23, 51, 64  
— Урана 118  
Силовая функция 16, 160 и д.  
Силы приливные 119  
Синус эллиптический 75  
Система координат транспортирующая 267  
— неправильная 142  
— правильная 142  
Скорость прецессии 181  
— собственного вращения 181  
Собственное вырождение 126  
Солнечная система, устойчивость 47, 104, 109, 129  
Солнечный парус 225—242  
— — наилучшей конструкции 227  
Спираль разгона 205 и д.  
— — монотонная (универсальная) 214, 215 и д.
- Спутник в поле земного сфероиде 51 и д., 57 и д., 77  
— гантелеобразный 243  
— Луны 122  
— экваториальный 22  
Спутники Урана 118  
Среднее движение 18  
Стабилизация спутников активная 171  
— — пассивная 171  
— — — гравитационная 171  
Сфера действия 122  
— — Земли 122  
— — Луны 122  
Сферы гравитационные 122, 123  
Тень Земли 229  
Теорема Арнольда 126—129  
— Лапласа 47, 104, 109, 129  
Теория устойчивости Ляпунова 139  
Тор двумерный 124  
—  $n$ -мерный 124  
Точечное отображение 318  
Точки либрации 152, 153  
— — треугольные 153  
Траектория разгона спиральная 205  
— сближения 155  
— транспортирующая 207  
Тяга малая — см. *Полет с малой тягой*
- Угловая дальность 280  
Угол путаницы 181  
Узел орбиты 19  
— — восходящий 19  
— — нисходящий 19  
Управление локально-оптимальное солнечным парусом 230  
— оптимальное 260  
— ступенчатое малой тягой 284  
Управления допустимые 260  
Уравнение в вариациях Пуавкаре 144  
— Гамильтона — Якоби 67, 143  
— Кеплера 17  
— Шредингера 146  
Уравнения в оскулирующих элементах 28  
— в элементах Делоне — см. *Элементы Делоне*  
— возмущенного движения 139  
— Гамильтона 67  
— Лагранжа первого рода 298

Уравнения эволюционные 31  
— — вращения спутника 184  
Уран, его спутники 118  
Ускорение малое постоянное по  
величине и направлению 81  
Ускорение ньютоновской силы  
тяготения 15  
Условно-периодическое движе-  
ние 126  
Устойчивость относительного  
равновесия в гравитационном  
поле 165  
— Солнечной системы 47, 104,  
109, 129

Фазовый портрет 196, 316  
Фокальный параметр 16  
Функции Бесселя 39  
— эллиптические Якоби 70, 75  
Функция Гамильтона 67, 107  
— знакоопределенная 141  
— знакостоянная 140  
— Ляпунова 141  
— неограниченная 142  
— ограниченная 141  
— — исчезающая 142  
— силовая 16, 160 и д.  
— тени 229  
Фурье ряд 49

Характеристичное число 142  
Хилла поверхность 150  
Число характеристичное функ-  
ции 142  
Шредингера уравнение 146  
Эволюционные уравнения 31  
Эйлера задача двух неподвиж-  
ных центров 65  
Эйлера — Пуансо движение 180  
Экваториальная орбита 22  
Экспедиции межпланетные с ма-  
лой тягой 256 и д.  
Экспериментальное определение  
ориентации спутников 329  
Эксцентриситет 16  
Эксцентрическая аномалия 17  
«Электрон» 332  
Элементы орбиты 20  
— — Делоне 32, 107  
— — оскулирующие 21  
Эллипс оскулирующий 21  
Эффект пропеллирующий 335  
«Эхо» 81, 98  
Якоби интеграл 150  
— эллиптические функции 70  
 $\varepsilon$ -поверхность 121  
 $\varepsilon$ -сфера 122

*Владимир Васильевич Белецкий*

**ОЧЕРКИ О ДВИЖЕНИИ КОСМИЧЕСКИХ ТЕЛ**

М., 1972, 360 стр. с илл.

Редактор *В. Г. Демин*

Худ. редактор *И. И. Румянцев*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректоры *Т. С. Плетнева, Е. Я. Стрелова*

Сдано в набор 29/III 1972 г. Подписано к печати  
14/VIII 1972 г. Бумага 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>. Физ. печ. л. 11,25.

Условн. печ. л. 18,9. Уч.-изд. л. 18,12.

Тираж 4000 экз. Т-03363. Цена книги 1 р. 81 к.

Заказ № 0249

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы  
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени

Московская типография № 7 «Искра революции»

Главполиграфпрома Комитета по печати

при Совете Министров СССР.

г. Москва, Трехпрудный пер., 9